2020 藤田医科大学（数学）解答解説

問題1

(1) x と k を実数とする。$3e^{2x}-7e^{x}=6$ であるとき，$e^{kx}=243$ を満たす k は $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(|2x-x^2|+x^2+2x+2)dx=\frac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(3) $1\leqq y\leqq 10-\dfrac{(x-5)^2}{5}$ かつ $y\geqq|x-5|$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ は $\boxed{\text{オカ}}$ 組ある。

(4) 複素数 z_1 と z_2 が $|z_1|=1$，$|z_2|=2$，$\arg z_1-\arg z_2=\dfrac{\pi}{6}$ を満たす。k を実数としたとき，

$\displaystyle\lim_{k\to0}\frac{|z_1+kz_2|-|z_1|}{k}=\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(5) $\triangle$ABC において AB$=2$，BC$=4$，CA$=3$ とし，BC 上の点 H が AH$\perp$BC を満たすとする。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{\boxed{\text{クケ}}}\left(\boxed{\text{コサ}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\boxed{\text{シス}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ である。

(6) $x^2-1+3\cos2\pi x=0$ の実数解の個数は $\boxed{\text{セ}}$ である。

(7) 正の整数のうち 2 でも 3 でも割り切れない数を小さい数から順に並べて数列を作る。

この数列の第 2020 項は $\boxed{\text{ソタチツ}}$ であり，第 1 項から第 2020 項までの総和を S とおくと，

$\dfrac{S}{2020}=\boxed{\text{テトナニ}}$ である。

(8) 円に内接する四角形 ABCD において，AB$=$BC$=$CA$=18$，DA$=46$ のとき，この円の半径は $\boxed{\text{ヌネ}}$ である。

(9) 100 人のテストの得点データを集計したところ，平均は 80，分散は 320 であったが，100 点を取った 2 名の結果が誤って 0 点と入力されていた。この 2 名のデータを 0 から 100 に修正すると，平均は $\boxed{\text{ノハ}}$ となり，分散は $\boxed{\text{ヒフヘ}}$ である。

(10) 六進法で表された次の数の計算結果を九進法で表すと $\boxed{\text{ホマ}}.\boxed{\text{ミ}}_{(9)}$ である。

$51.3_{(6)}+24.1_{(6)}$

解答

(1) $3e^{2x}-7e^{x}-6=0 \iff (3e^{x}+2)(e^{x}-3)=0$

$e^{x}>0$ であるから

$e^{x}=3$

よって

$e^{kx}=(e^{x})^{k}=3^{k}=243$

を満たすのは

$k=\overset{\text{ア}}{\boxed{5}}$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{2}|x^2-2x|dx+\int_{-2}^{2}(x^2+2x+2)dx$

とし

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}|x^2-2x|dx&=\int_{-2}^{0}(x^2-2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}\\&=0-\left(-\frac{8}{3}-4\right)+\left(-\frac{8}{3}+4\right)-0\\&=8\end{aligned}$$

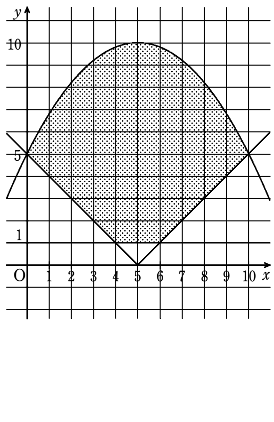
$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}(x^2+2x+2)dx&=2\int_{0}^{2}(x^2+2)dx\\&=2\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_{0}^{2}\\&=2\left(\frac{8}{3}+4\right)\\&=\frac{40}{3}\end{aligned}$$

であるから，求める定積分は

$8+\dfrac{40}{3}=\dfrac{\overset{\text{イウ}}{\boxed{64}}}{\overset{\text{エ}}{\boxed{3}}}$

(3) $1\leqq y\leqq 10-\dfrac{(x-5)^2}{5}$ かつ $y\geqq|x-5|$

により表される領域を図示すると図の打点部になる



$x=0$ のとき $y=5$ の 1 個

$x=1$ のとき $4\leqq y\leqq6$ より $y=4,\ 5,\ 6$ の 3 個

$x=2$ のとき $3\leqq y\leqq\dfrac{41}{5}$ より

$y=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$ の 6 個

$x=3$ のとき $2\leqq y\leqq\dfrac{46}{5}$ より

$y=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ の 8 個

$x=4$ のとき $1\leqq y\leqq\dfrac{49}{5}$ より

$y=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ の 9 個

$x=5$ のとき $1\leqq y\leqq10$ より

$y=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$ の 10 個

対称性から，求める整数の組は

$(1+3+6+8+9)\times2+10=\overset{\text{オカ}}{\boxed{64}}$ 組

ある。

(4) $z_1=\cos\theta+i\sin\theta$，$z_2=2\left\{\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$

とおくと

$z_1+kz_2=\left\{\cos\theta+2k\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}+i\left\{\sin\theta+2k\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$

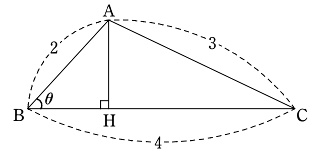
より

$$\begin{aligned}|z_1+kz_2|&=\sqrt{\left\{\cos\theta+2k\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right\}^2+\left\{\sin\theta+2k\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right\}^2}\\&=\sqrt{1+4k^2+4k\left\{\cos\theta\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\theta\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right\}}\\&=\sqrt{1+4k^2+4k\cos\left\{\theta-\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right\}}\\&=\sqrt{1+4k^2+4k\cos\frac{\pi}{6}}\\&=\sqrt{4k^2+2\sqrt{3}k+1}\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}\lim_{k\to0}\frac{|z_1+kz_2|-|z_1|}{k}&=\lim_{k\to0}\frac{\sqrt{4k^2+2\sqrt{3}k+1}-1}{k}\\&=\lim_{k\to0}\frac{4k^2+2\sqrt{3}k}{k(\sqrt{4k^2+2\sqrt{3}k+1}+1)}\\&=\lim_{k\to0}\frac{4k+2\sqrt{3}}{\sqrt{4k^2+2\sqrt{3}k+1}+1}\\&=\frac{0+2\sqrt{3}}{\sqrt{0+0+1}+1}\\&=\sqrt{\overset{\text{キ}}{\boxed{3}}}\end{aligned}$$

(5) $\angle$ABC$=\theta$ とおく。



余弦定理から

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{2^2+4^2-3^2}{2\cdot2\cdot4}\\&=\frac{11}{16}\end{aligned}$$

よって

BH$=2\cos\theta=\dfrac{11}{8}$

CH$=4-\dfrac{11}{8}=\dfrac{21}{8}$

となるから

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{\underset{\text{クケ}}{\boxed{32}}}\left(\overset{\text{コサ}}{\boxed{21}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overset{\text{シス}}{\boxed{11}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$

(6) $x^2-1+3\cos2\pi x=0 \iff 3\cos2\pi x=1-x^2$

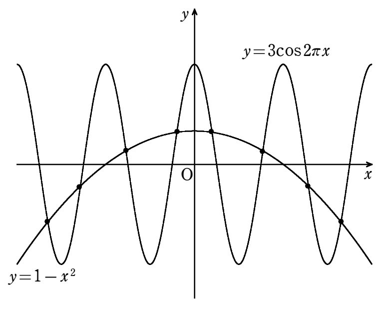
と分離し

$y=3\cos2\pi x$ と $y=1-x^2$

の 2 つのグラフの交点を数えると

$\overset{\text{セ}}{\boxed{8}}$ 個

である。



(7) 題意の数列は

1，5，7，11，13，17，……

である。そこで

$\{a_n\}$: 1，7，13，……

$\{b_n\}$: 5，11，17，……

と設定する。このとき，一般項はそれぞれ

$a_n=1+6(n-1)=6n-5$

$b_n=5+6(n-1)=6n-1$

である。求めたい第 2020 項は b_{1010} に相当するから

$b_{1010}=6\cdot1010-1=\overset{\text{ソタチツ}}{\boxed{6059}}$

また，

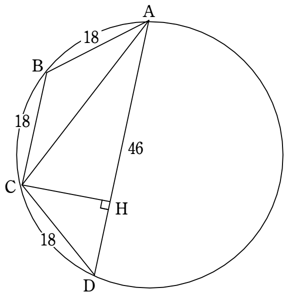
$$\begin{aligned}S&=\sum_{k=1}^{1010}a_k+\sum_{k=1}^{1010}b_k\\&=\sum_{k=1}^{1010}(12k-6)\\&=\frac{1}{2}\cdot1010\cdot(6+12\cdot1010-6)\\&=\frac{1}{2}\cdot1010\cdot(12\cdot1010)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{S}{2020}&=\frac{\frac{1}{2}\cdot1010\cdot12\cdot1010}{2020}\\&=3\cdot1010\\&=\overset{\text{テトナニ}}{\boxed{3030}}\end{aligned}$$

(8)　△ABC と △ADC で余弦定理を用いて

$$AC^2=18^2+18^2-2\cdot18^2\cdot\cos B \quad \cdots①$$
$$AC^2=18^2+46^2-2\cdot18\cdot46\cdot\cos(\pi-B) \quad \cdots②$$



②−① として

$$0=46^2-18^2+2\cdot18\cdot(46+18)\cdot\cos B$$
$$\Longleftrightarrow\ 0=64\cdot28+2\cdot18\cdot64\cdot\cos B$$
$$\Longleftrightarrow\ 0=28+36\cos B$$
$$\Longleftrightarrow\ \cos B=-\frac{7}{9}$$

が得られる。このとき

$$\sin B=\sqrt{1-\frac{49}{81}}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

また，① より

$$AC^2=18^2+18^2-2\cdot18^2\cdot\left(-\frac{7}{9}\right)$$
$$=18^2\left(1+1+\frac{14}{9}\right)$$
$$=18^2\cdot\frac{32}{9}$$

$AC>0$ であるから

$$AC=18\cdot\frac{4\sqrt{2}}{3}=24\sqrt{2}$$

よって，△ABC で正弦定理を用いると，外接円半径を R として

$$2R=\frac{AC}{\sin B} \quad \Longleftrightarrow \quad 2R=\frac{24\sqrt{2}}{\frac{4\sqrt{2}}{9}}$$
$$\Longleftrightarrow \quad R={}^{ヌネ}\boxed{27}$$

別解　四角形 ABCD は等脚台形である。
トレミーの定理より

$$AC\cdot BD=18\cdot46+18\cdot18=18\cdot64$$

$AC=BD$ であるから

$$AC^2=18\cdot64$$

$AC>0$ であるから

$$AC=3\sqrt{2}\cdot8=24\sqrt{2}$$

C から AD に下ろした垂線の足を H とおく。
このとき，

$$DH=\frac{1}{2}(46-18)=14$$

であるから

$$\cos D=\frac{14}{18}=\frac{7}{9}$$

よって

$$\sin D=\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

したがって，△ACD で正弦定理を用いると

$$2R=\frac{AC}{\sin D} \quad \Longleftrightarrow \quad 2R=\frac{24\sqrt{2}}{\frac{4\sqrt{2}}{9}}$$
$$\Longleftrightarrow \quad R={}^{ヌネ}\boxed{27}$$

(9)　修正前の 100 人の得点の和を S，得点の 2 乗和を T とおく。
修正前の平均が 80 であるから

$$\frac{S}{100}=80 \quad \Longleftrightarrow \quad S=8000$$

また，修正前の分散が 320 であるから

$$\frac{T}{100}-80^2=320 \quad \Longleftrightarrow \quad T=100\cdot6720$$

よって，修正後の平均は

$$\frac{S+100\times2}{100}=\frac{8200}{100}={}^{ノハ}\boxed{82}$$

分散は

$$\frac{T+100^2\times2}{100}-82^2=\frac{100\cdot6720+100^2\cdot2}{100}-82^2$$
$$=6720+200-82^2$$
$$=6920-82^2$$
$$=4(1730-1681)$$
$$=4\cdot49$$
$$={}^{ヒフヘ}\boxed{196}$$

別解　もう少し簡潔に
100 人の合計点数が 200 点増えるのだから，平均は

$$80+\frac{200}{100}={}^{ノハ}\boxed{82}$$

また，100 人の 2 乗平均は

$$\frac{100^2\times2}{100}=200$$

増え，平均の 2 乗は

$$82^2-80^2=162\cdot2=324$$

増える。よって，分散は

$$320+(200-364)=320-124$$
$$={}^{ノハヒ}\boxed{196}$$

(10)　10 進法で表すと

$$51.3_{(6)}+24.1_{(6)}=\left(30+1+\frac{3}{6}\right)+\left(12+4+\frac{1}{6}\right)$$
$$=47+\frac{2}{3}$$
$$=47+\frac{6}{9}$$
$$=5\cdot9+2\cdot1+6\cdot\frac{1}{9}$$

であるから，9 進法による表記は

$${}^{ホマミ}\boxed{52.6}$$

問題2

袋の中に赤玉が 2 個，白玉が 3 個あり，袋の外に赤玉が 2 個，白玉が 3 個ある。

「袋の中から玉を 1 個取り出して色を確認し，この玉を袋にもどし，さらに同色の玉が外にある場合は同色の玉 1 個を袋に追加し，ない場合は追加しない」

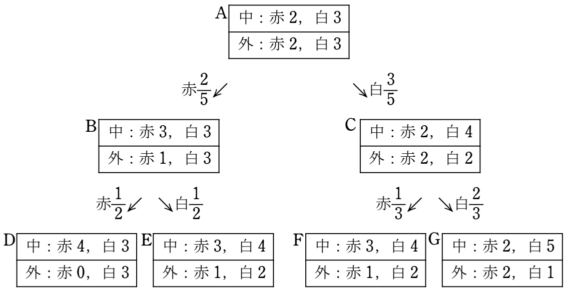
という試行を繰り返す。次の問いに答えよ。

(1)　2 回目の試行後，袋の外に白玉が 3 個ある確率を求めよ。

(2)　3 回目の試行で白玉が取り出される確率を求めよ。

(3)　試行を繰り返すとき，袋の外の赤玉が白玉より先になくなる確率を求めよ。

解答



(1)　2 回の試行で，袋の外に白玉が 3 個あるのは

A→B→D

と引くときであるから

$$\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{5}}$$

(2)　3 回の試行で白玉を取り出すのは

A→B→D　のとき　$\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{35}$

A→B→E　のとき　$\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}=\frac{4}{35}$

A→C→F　のとき　$\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{7}=\frac{4}{35}$

A→C→G　のとき　$\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{10}{35}$

のいずれかの場合である。

よって，求める確率は

$$\frac{3+4+4+10}{35}=\frac{21}{35}=\boxed{\frac{3}{5}}$$

(3)　赤玉が先になくなるのは

A→B→D　のとき　$\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$

A→B→E→赤　のとき　$\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{35}$

A→B→E→白→赤　のとき　$\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{70}$

A→C→F→赤　のとき　$\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{35}$

A→C→F→白→赤　のとき　$\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{70}$

A→C→G→赤→赤　のとき　$\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{7}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{70}$

のいずれかの場合である。

よって，求める確率は

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{35}\times2+\frac{3}{70}\times3=\frac{14+12+9}{70}$$

$$=\boxed{\frac{1}{2}}$$

問題3

xy 座標平面上の楕円 $C : x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ の $y>0$ の範囲にある焦点を F，$y<0$ の範囲にある焦点を F′ とする。焦点 F を通り傾きが m の直線 l と楕円 C との 2 つの交点を A，B とする。直線 l と楕円 C で囲まれた 2 つの部分のうち，F′ を含まない部分を D とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 l の方程式を求めよ。

(2) 線分 AB の長さを m を用いて表せ。

(3) AF′＋F′B の最大値を求めよ。

(4) AF′＋F′B が最大になるときの D の面積を求めよ。

(5) $m=\sqrt{3}$ のとき，D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

解答

(1) $\mathrm{F}(0,\ \sqrt{3}),\ \mathrm{F}'(0,\ -\sqrt{3})$

である。よって，直線 l の方程式は

$$\boxed{y=mx+\sqrt{3}}$$

(2) $y=mx+\sqrt{3}$

を C の式に代入して

$$x^2+\frac{(mx+\sqrt{3})^2}{4}=1$$

$$\Leftrightarrow\quad 4x^2+(m^2x^2+2\sqrt{3}mx+3)=4$$

$$\Leftrightarrow\quad (m^2+4)x^2+2\sqrt{3}mx-1=0 \quad \cdots(*)$$

この 2 次方程式の 2 つの解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおく。このとき，

$$\alpha+\beta=-\frac{2\sqrt{3}m}{m^2+4},\quad \alpha\beta=-\frac{1}{m^2+4}$$

により

$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)^2&=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta\\&=\left(-\frac{2\sqrt{3}m}{m^2+4}\right)^2-4\left(-\frac{1}{m^2+4}\right)\\&=\frac{12m^2}{(m^2+4)^2}+\frac{4}{m^2+4}\\&=\frac{12m^2+4(m^2+4)}{(m^2+4)^2}\\&=\frac{16(m^2+1)}{(m^2+4)^2}\end{aligned}$$

$\beta-\alpha>0$ であるから

$$\beta-\alpha=\frac{4\sqrt{m^2+1}}{m^2+4}$$

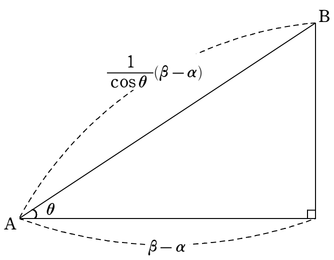
$m>0$ のときを考える。l と x 軸正方向のなす角を θ とおく。$\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

このとき

$$\tan\theta=m,\quad \frac{1}{\cos\theta}=\sqrt{1+m^2}$$

であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=(\beta-\alpha)\times\frac{1}{\cos\theta}\\&=\frac{4\sqrt{m^2+1}}{m^2+4}\times\sqrt{m^2+1}\\&=\boxed{\frac{4(m^2+1)}{m^2+4}}\end{aligned}$$



($m\leqq 0$ のときも同様である。)

(3) 楕円の定義により

$$\mathrm{AF}+\mathrm{AF}'=2\cdot 2 \quad かつ \quad \mathrm{BF}+\mathrm{BF}'=2\cdot 2$$

が成り立つ。辺々，和をとると

$$(\mathrm{AF}+\mathrm{BF})+(\mathrm{AF}'+\mathrm{BF}')=8$$

$$\Leftrightarrow\quad \mathrm{AB}+(\mathrm{AF}'+\mathrm{BF}')=8$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{4(m^2+1)}{m^2+4}+(\mathrm{AF}'+\mathrm{F'B})=8$$

$$\Leftrightarrow\quad \mathrm{AF}'+\mathrm{F'B}=8-\frac{4(m^2+1)}{m^2+4}$$

よって

$$\begin{aligned}\mathrm{AF}'+\mathrm{F'B}&=8-4\left(1-\frac{3}{m^2+4}\right)\\&=4+\frac{12}{m^2+4}\end{aligned}$$

となり，これは $m=0$ のとき最大値

$$4+\frac{12}{4}=\boxed{\ 7\ }$$

をとる。

(4) $m=0$ のとき，D の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=2\int_{\sqrt{3}}^{2}x\,dy\\&=2\int_{\sqrt{3}}^{2}\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}\,dy\\&=\int_{\sqrt{3}}^{2}\sqrt{4-y^2}\,dy\end{aligned}$$

$y=2\sin\theta$

と置換すると

$$\begin{aligned}S&=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\,(2\cos\theta\,d\theta)\\&=4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta\\&=4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta\\&=2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\\&=2\left\{\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\\&=\boxed{\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$

(5) $m=\sqrt{3}$ のとき，$(*)$ は

$$7x^2+6x-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x+1)(7x-1)=0$$

より

$$x=-1,\ \frac{1}{7}$$

したがって，求める体積を V とおくと

$$\begin{aligned}V&=\int_{-1}^{\frac{1}{7}}\pi y^2dx-\frac{1}{3}\cdot\pi\left(\frac{8\sqrt{3}}{7}\right)^2\cdot\frac{8}{7}\\&=\int_{-1}^{\frac{1}{7}}\pi\{4(1-x^2)\}dx-\frac{8^3}{7^3}\pi\\&=4\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{\frac{1}{7}}-\frac{8^3}{7^3}\pi\\&=4\pi\left\{\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7^3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right\}-\frac{8^3}{7^3}\pi\\&=4\pi\cdot\frac{17}{21}-4\pi\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7^3}-\frac{8^3}{7^3}\pi\\&=\frac{4}{7}\pi\left(\frac{17}{3}-\frac{1}{3\cdot 7^2}-\frac{128}{7^2}\right)\\&=\frac{4}{7}\pi\left(\frac{17}{3}-\frac{385}{3\cdot 7^2}\right)\\&=\frac{4}{7}\pi\cdot\frac{64}{21}\\&=\boxed{\frac{256}{147}}\pi\end{aligned}$$