1

＜問題＞

数列$\{a_n\}$を次のように，第k群がk個の項をもつように分ける。

$$1 \mid 3, 5 \mid 8, 11, 14 \mid 18, 22, 26, 30 \mid 35, 40, \cdots \mid \cdots$$

次の問いに答えよ。

(1)　第k群の末項をkを用いて表すと $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2)　$a_{100} = \boxed{\text{イ}}$ である。また，$a_n < 2020$ を満たす最大のnは $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(3)　第k群に含まれる数の総和をkを用いて表すと $\boxed{\text{エ}}$ である。

(4)　$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とすると，$S_{30} = \boxed{\text{オ}}$ である。

＜解答＞

(1)　第k群の末項をb_kとおくと，第$(k+1)$群は初項$b_k + (k+1)$，公差$(k+1)$，項数$(k+1)$の等差数列なので、

$$b_{k+1} = b_k + k + 1 + (k+1-1)(k+1) = b_k + (k+1)^2$$

$k \geqq 2$のとき

$$b_k = b_1 + \sum_{j=1}^{k-1}(j+1)^2$$
$$= 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k}{6}(k+1)(2k+1)$$

$k=1$のとき$\frac{1}{6}\times 2\times 3 = 1$より満たす。

よって，第k群の末項は

$$b_k = \frac{k}{6}(k+1)(2k+1) \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

(2)　第k群の末項までの項数は

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k}{2}(k+1)\text{ 個ある。}$$

第 100 項が第k群にあるとき

$$\frac{k-1}{2}\cdot k + 1 \leqq 100 \leqq \frac{k}{2}(k+1)$$

を満たすので，このときのkは 14

初項は$\frac{13}{2}\cdot 14 + 1 = 92$項目から$a_{100}$は 14 群の 9 項目

(1)より，$b_{13} = \frac{13}{6}\cdot 14\cdot 27 = 819$ から

$$a_{100} = 819 + 14\times 9 = 945$$

また$b_k < 2020$を満たす最大のkは

$$b_{18} = \frac{18}{6}\cdot 19\cdot 37 = 2109,\ b_{17} = \frac{17}{6}\cdot 18\cdot 35 = 1785$$

から$k = 17$

18 群のl項目までの和は$1785 + 18l$より

$$1785 + 18l < 2020 \Leftrightarrow l \leqq 13$$

よって，$a_n < 2020$を満たす最大のnは第 18 群の 13 項目より

$$\frac{17}{2}\cdot 18 + 13 = 166$$

(3)　$k \geqq 2$のとき，初項$b_{k-1} + k$，末項b_k，項数kから第k群に含まれる数の総和は

$$\frac{k}{2}(b_{k-1} + k + b_k)$$
$$= \frac{k}{2}\left\{\frac{k-1}{6}k(2k-1) + k + \frac{k}{6}(k+1)(2k+1)\right\}$$
$$= \frac{k^2}{12}\{(k-1)(2k-1) + 6 + (k+1)(2k+1)\}$$
$$= \frac{k^2}{12}(4k^2 + 8) = \frac{k^2}{3}(k^2 + 2)$$

(4)　第 30 項が第k群にあるとき(2)と同様にして

$$\frac{k-1}{2}\cdot k + 1 \leqq 30 \leqq \frac{k}{2}(k+1)$$

を満たすので，このときのkは 8

第 8 群の初項は$\frac{7}{2}\cdot 8 + 1 = 29$項目でその数は

$$\frac{7}{6}\cdot 8\cdot 15 + 8 = 148$$

から第 8 群の 2 項目a_{30}までの和S_{30}は

$$S_{30} = \sum_{m=1}^{7}\frac{m^2}{3}(m^2 + 2) + 148 + 156$$
$$= \frac{1}{3}(1\cdot 3 + 4\cdot 6 + 9\cdot 11 + 16\cdot 18 + 25\cdot 27 + 36\cdot 38$$
$$+ 49\cdot 51) + 148 + 156$$
$$= 1 + 4\cdot 2 + 3\cdot 11 + 16\cdot 6 + 25\cdot 9 + 12\cdot 38 + 49\cdot 17$$
$$+ 148 + 156$$
$$= 1956$$

2

＜問題＞

次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(\theta)=\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta$ を考える。 $t=\cos\theta$ とおくとき， $\cos 3\theta$ および $\cos 2\theta\cos 4\theta$ を t の式で表せ。また， $f\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$ の値を求めよ。

(2)　$7x+11y=2020\cdots(☆)$ とする。(☆)を満たす自然数 x と y の組の総数を求めよ。また，(☆)を満たす自然数の組 (x, y) に対して，$|-3x+7y|$ の最大値と最小値を求めよ。

＜解答＞

(1)　$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=4t^3-3t$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta\cos 4\theta&=\frac{1}{2}(\cos 6\theta+\cos 2\theta)\\&=\frac{1}{2}\left(2\cos^2 3\theta-1+2\cos^2\theta-1\right)\\&=\left(4t^3-3t\right)^2+t^2-1\\&=16t^6-24t^4+10t^2-1\end{aligned}$$

また， $\cos 3\theta=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$, $\cos 6\theta=\cos\dfrac{2}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}$ であることを考慮して

$$\begin{aligned}f(\theta)&=\frac{1}{2}\cos\theta(\cos 6\theta+\cos 2\theta)\\&=\frac{1}{2}\cos\theta\left(-\frac{1}{2}+\cos 2\theta\right)\\&=-\frac{1}{4}\cos\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\cos 2\theta\\&=-\frac{1}{4}\cos\theta+\frac{1}{4}(\cos 3\theta+\cos\theta)\\&=\frac{1}{4}\cos 3\theta\\&=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

(2)

$(☆)\Leftrightarrow\ 7x+(7+4)y=2020\Leftrightarrow\ 7(x+y)+4y=2020$

$\therefore y=505$, $x+y=0$

つまり $x=-505$ のとき(☆)は成り立つので

$$\begin{aligned}(☆)&\Leftrightarrow 7(x+505)+11(y-505)=0\\&\Leftrightarrow 7(x+505)=-11(y-505)\end{aligned}$$

7 と 11 は互いに素なので

$x+505=11k$ かつ $y-505=-7k$　（k は整数）

$\therefore x=11k-505$ ， $y=-7k+505\cdots$(※)

$x\geqq 1, y\geqq 1$ のとき， $46\leqq k\leqq 72$ より

自然数 x と y の組は 27 組

このとき(※)から，

$$\begin{aligned}|-3x+7y|&=|-3(11k-505)+7(-7k+505)|\\&=|-82k+5050|\end{aligned}$$

$k=46$ のとき最大値

$$|-82\times 46+5050|=1278$$

また，

$k=61$ のとき

$$|-82\times 61+5050|=|48|=48$$

$k=62$ のとき

$$|-82\times 61+5050|=|-34|=34$$

であるから最小値は

34

である。

$\boxed{3}$

＜問題＞

次の問いに答えよ。必要なら

$\log_{10}2=0.30103$, $\log_{10}3=0.47712$, $\log_{10}7=0.84510$ を用いよ。

(1)　2020！の末尾に並ぶ 0 の個数を求めよ。

(2)　3^{2020} の桁数および先頭の数字を求めよ。

(3)　3^{2020} の下 3 桁を求めよ。

＜解答＞

(1)　1 から 2020 までの整数の中で 2 の個数が 5 の個数よりも多いことは明らかなので，5 の個数を数えたらよい。

5 の倍数は 5×1 から 5×404 までの 404 個

5^2 の倍数は $5^2\times1$ から $5^2\times80$ までの 80 個

5^3 の倍数は $5^3\times1$ から $5^3\times16$ までの 16 個

5^4 の倍数は $5^4\times1$ から $5^4\times3$ までの 3 個

$5^5=3125$ より $5^5, 5^6, \cdots$ の倍数は 0 個

以上から，

404+80+16+3=503 個の 0 が並ぶ

(2)　$\log_{10}3^{2020}=2020\times0.47712=963.7824$

$\therefore 3^{2020}=10^{963.7824}$ より 964 桁

また，$3^{2020}=10^{963}\times10^{0.7824}$

ここで，$\log_{10}6=\log_{10}2+\log_{10}3=0.77815$

$\therefore 6=10^{0.77815}$, $7=10^{0.84510}$

$10^{0.77815}<10^{0.7824}<10^{0.84510}$ より

$6<10^{0.7824}<7$

ゆえに，

先頭の数字は 6

(3)

$$3^{2020}=\left(3^2\right)^{1010}=(10-1)^{1010}$$
$$={}_{1010}C_0\,10^{1010}+{}_{1010}C_1\,10^{1009}(-1)+\cdots+{}_{1010}C_{1007}10^3(-1)^{1007}$$
$$+{}_{1010}C_{1008}10^2(-1)^{1008}+{}_{1010}C_{1009}10(-1)^{1009}+{}_{1010}C_{1010}(-1)^{1010}$$

${}_{1010}C_0\,10^{1010}+{}_{1010}C_1\,10^{1009}(-1)+\cdots+{}_{1010}C_{1007}10^3(-1)^{1007}$

は $10^3=1000$ の倍数であるから下 3 桁は 000

$${}_{1010}C_{1008}10^2(-1)^{1008}=\frac{1010\times1009}{2}\times100=50954500$$

$${}_{1010}C_{1009}10(-1)^{1009}=1010\times10\times(-1)=-10100$$

$${}_{1010}C_{1010}(-1)^{1010}=1$$

であるから 3^{2020} の下 3 桁は

$500-100+1=401$

(※)講評

$\boxed{2}$(1)三角関数の積→和公式を用いて $\cos3\theta$ を登場させる問題ではあるが，$\cos4\theta$ を $\cos2\cdot2\theta$ から導いても求めることができる。

$\boxed{2}$(2)と$\boxed{3}$は類題に触れたこともあると思われるのでここでの取りこぼしは痛い。

問題は$\boxed{1}$で、規則性がわかるようで経験をしたことがないからわかりにくかったであろうこの群数列が合否を分けた 1 題となったのではないだろうか。

(4)だけは書き出しても何とかなったと思われるが他は「運よく規則が見つかった」ならば満点で、漸化式が見えなかったら(1)～(3)は厳しいものになったであろう。

例年通り目標得点率は 75%です。