1

(1)　a は正の定数とする。$y=-x^2+2ax+2a$ の値が 2 になることはあるが，3 になることはない。このとき，a の値の範囲は $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2)　2 つの円 $(x-\sqrt{t})^2+(y-3)^2=1$ と $x^2+(y-t)^2=9$ は $t=\boxed{\text{イ}}$ のとき外接する。

(3)　$\cos^4\dfrac{\pi}{24}-\sin^4\dfrac{\pi}{24}=\boxed{\text{ウ}}$

(4)　次の式を因数分解しなさい。$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=\boxed{\text{エ}}$

(5)　自然数 n^3+100 が $n+10$ で割り切れるような最大の自然数 n は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(6)　$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\left(\int_0^x x^4e^{2t}dt-\int_0^2 16e^{2t}dt\right)=\boxed{\text{カ}}$

解答

(1)　$-x^2+2ax+2a=2$

つまり

$x^2-2ax+(2-2a)=0$

を満たす x が存在すればよいから，判別式

$a^2+2a-2\geqq0$

より

$a\leqq-1-\sqrt{3}$，$a\geqq-1+\sqrt{3}$　…①

また

$-x^2+2ax+2a=3$

つまり

$x^2-2ax+(3-2a)=0$

を満たす x が存在しなければよいから，判別式

$a^2+2a-3<0$

より

$-3<a<1$　…②

①かつ②かつ $a>0$ により，求める a の値の範囲は

ア $\boxed{-1+\sqrt{3}\leqq a<1}$

である。

(2)　$t\geqq0$ の下で，2 円の中心と半径はそれぞれ

$(\sqrt{t},\ 3)$，1　と　$(0,\ t)$，3

であるから，外接する条件は

$\sqrt{(\sqrt{t}-0)^2+(3-t)^2}=1+3$

$\Leftrightarrow$　$\sqrt{t^2-5t+9}=4$

両辺正であるから，2 乗して

$t^2-5t+9=16$　$\Leftrightarrow$　$t^2-5t-7=0$

$t\geqq0$ を満たすのは

$t=$ イ $\boxed{\dfrac{5+\sqrt{53}}{2}}$

である。

(3)

$$\cos^4\frac{\pi}{24}-\sin^4\frac{\pi}{24}=\left(\cos^2\frac{\pi}{24}+\sin^2\frac{\pi}{24}\right)\left(\cos^2\frac{\pi}{24}-\sin^2\frac{\pi}{24}\right)$$
$$=\cos^2\frac{\pi}{24}-\sin^2\frac{\pi}{24}$$
$$=\cos\frac{\pi}{12}$$
$$=\text{ウ}\ \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

(4)

$$(a+b+c)^3-a^3=(a+b+c-a)\{(a+b+c)^2+a(a+b+c)+a^2\}$$
$$=(b+c)(3a^2+b^2+c^2+3ab+2bc+3ca)$$

$b^3+c^3=(b+c)(b^2-bc+c^2)$

であるから

$$(a+b+c)^3-a^3-(b^3+c^3)=(b+c)(3a^2+3ab+3bc+3ca)$$
$$=3(b+c)(a^2+ab+bc+ca)$$
$$=3(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$$
$$=\text{エ}\ \boxed{3(b+c)(a+b)(a+c)}$$

(5)　割り算を実行すると

$n^3+100=(n+10)(n^2-10n+100)-900$

であるから

900 が $n+10$ で割り切れればよい

このような最大の整数 n は

オ $\boxed{890}$

である。

(6)　$f(t)=e^{2t}$，$F(t)=\dfrac{1}{2}e^{2t}$

とおく。このとき

$$\int_0^x x^4e^{2t}dt-\int_0^2 16e^{2t}dt=x^4\int_0^x f(t)dt-16\int_0^2 f(t)dt$$
$$=x^4\Big[F(t)\Big]_0^x-16\Big[F(t)\Big]_0^2$$
$$=x^4\{F(x)-F(0)\}-16\{F(2)-F(0)\}$$
$$=x^4F(x)-16F(2)-F(0)(x^4-16)$$

さらに，$g(x)=x^4F(x)$ とおくと

$$=g(x)-g(2)-F(0)(x-2)(x+2)(x^2+4)$$

とかける。よって

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\left(\int_0^x x^4e^{2t}dt-\int_0^2 16e^{2t}dt\right)=\lim_{x\to2}\left\{\frac{g(x)-g(2)}{x-2}-F(0)(x+2)(x^2+4)\right\}$$
$$=g'(2)-32F(0)$$

ここで

$$g'(x)=4x^3F(x)+x^4f(x)\,\Big|_{x=2}=32F(2)+16f(2)$$
$$=32\cdot\frac{1}{2}e^4+16\cdot e^4$$
$$=32e^4$$

$F(0)=\dfrac{1}{2}$

であるから

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\left(\int_0^x x^4e^{2t}dt-\int_0^2 16e^{2t}dt\right)=32e^4-32\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\text{カ}\ \boxed{16(2e^4-1)}$$

2

(1)　方程式 $-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+3=1$ の解を α，β $(\alpha>\beta)$ とおく。このとき，$\alpha=\boxed{\text{ア}}$ であり，

$$\int_1^\alpha\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+2\right)dx=\boxed{\text{イ}}\alpha+\boxed{\text{ウ}}$$

である。ただし，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ には有理数を入れなさい。

(2)　連立不等式

$$\begin{cases}\log_y(x^2+y-4)<\log_y(x-y+2)\\ 1<y\end{cases}$$

の表す領域を D とする。以下の空欄には α を用いないこと。

(i)　直線 $x=a$ と D が共有点をもつような定数 a の値の範囲は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(ii)　直線 $y=b$ と D が共有点をもつような定数 b の値の範囲は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(iii)　D と D の境界を合わせた図形の面積は

$\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}+\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}+\boxed{\text{コ}}$

である。ただし，$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{コ}}$ には有理数，$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ にはできるだけ小さい自然数を入れなさい。ただし，$\boxed{\text{キ}}<\boxed{\text{ケ}}$ とする。

(iv)　点 P$(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$x+y=k$ とおくと，k の値の範囲は $\boxed{\text{サ}}$ である。

(3)　不等式 $\log_y(x^2+y-4)<\log_y(x-y+2)$ の表す領域を D' とおく。点 P$(x,\ y)$ が領域 D' を動くとき，$x+y=k$ とおくと，k の値の範囲は $\boxed{\text{シ}}$ である。

解答

(1)　$-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+3=1$　$\Leftrightarrow$　$x^2-x-4=0$

を解くと

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

$\alpha>\beta$ より

$\alpha=$ ア $\boxed{\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}}$

である。また

$$\int_1^\alpha\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+2\right)dx=\left[-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2+2x\right]_1^\alpha$$
$$=-\frac{1}{6}\alpha^3+\frac{1}{4}\alpha^2+2\alpha-\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+2\right)$$
$$=-\frac{1}{6}\alpha^3+\frac{1}{4}\alpha^2+2\alpha-\frac{25}{12}$$

であり，割り算を実行すると

$$-\frac{1}{6}\alpha^3+\frac{1}{4}\alpha^2+2\alpha-\frac{25}{12}=\left(-\frac{1}{6}\alpha+\frac{1}{12}\right)(\alpha^2-\alpha-4)+\frac{17}{12}\alpha-\frac{7}{4}$$

となり

$\alpha^2-\alpha-4=0$

であるから

$$\int_1^\alpha\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+2\right)dx=\text{イ}\ \boxed{\frac{17}{12}}\alpha+\text{ウ}\ \boxed{-\frac{7}{4}}$$

(2) $\begin{cases} \log_y(x^2+y-4)<\log_y(x-y+2) & \cdots① \\ 1<y & \cdots② \end{cases}$

①において，真数は正であるから

$x^2+y-4>0 \iff y>-x^2+4$

$x-y+2>0 \iff y>x+2$

また，②より 底>1 であるから，①から

$x^2+y-4<x-y+2 \iff y<-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+3$

が得られるから

$$(① かつ ②) \iff \begin{cases} y>-x^2+4 \\ y>x+2 \\ y<-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+3 \\ y>1 \end{cases}$$

となる。これより，領域 D は下図の黒色打点部である。(境界含まず)

したがって

(i) エ $\boxed{1<a<\frac{1+\sqrt{17}}{2}}$

(ii) オ $\boxed{1<b<3}$

(iii) 求める面積を S とすると，(1)の結果を用いて

$$\begin{aligned} S&=\int_1^{\alpha}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+3-1\right)dx-\int_1^{\sqrt{3}}(-x^2+4-1)dx \\ &=\frac{17}{12}\alpha-\frac{7}{4}-\left[-\frac{1}{3}x^3+3x\right]_1^{\sqrt{3}} \\ &=\frac{17}{12}\cdot\frac{1+\sqrt{17}}{2}-\frac{7}{4}+\sqrt{3}-3\sqrt{3}-\frac{1}{3}+3 \\ &=\frac{17+17\sqrt{17}}{24}-\frac{7}{4}-2\sqrt{3}+\frac{8}{3} \\ &={}^{カ}\boxed{-2}\sqrt{{}^{キ}\boxed{3}}+{}^{ク}\boxed{\frac{17}{24}}\sqrt{{}^{ケ}\boxed{17}}+{}^{コ}\boxed{\frac{13}{8}} \end{aligned}$$

(iv) D と D の境界を含めた領域（領域 E とする）について考える。

$x+y=k \iff y=-x+k$

より，領域 E とこの直線が共有点をもつような k を考える。(図の赤線)

k_{min} は $(x,\ y)=(\sqrt{3},\ 1)$ のときで

$k_{min}=1+\sqrt{3}$

k_{max} は

$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+3$ と $y=-x+k$ が接するとき

である。

$y'=-x+\frac{1}{2}=-1$

とすると

$x=\frac{3}{2}$ また $y=\frac{21}{8}$

が得られ，$1<\frac{3}{2}<\sqrt{3}$ を満たすから，接点は E 内に存在する。

よって

$k_{max}=\frac{3}{2}+\frac{21}{8}=\frac{33}{8}$

以上より，境界を除いて

サ $\boxed{1+\sqrt{3}<k<\frac{33}{8}}$

(3) $0<y<1$ のとき，①は

$x^2+y-4>x-y+2 \iff y>-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+3$

であるから，領域 D' は先の黒色打点部と青色斜線部を合わせたものである。

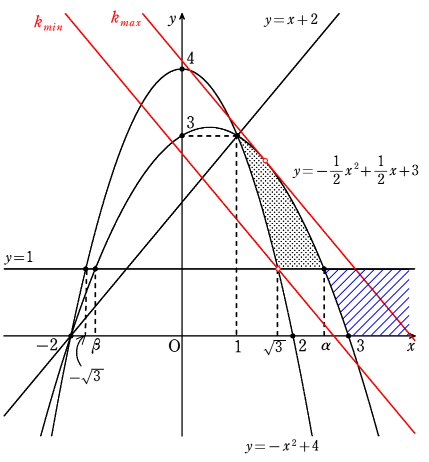
したがって

$x+y=k$

が取り得るのは

シ $\boxed{k>1+\sqrt{3}}$

である。



3

n を 3 以上の自然数とする。左から順に 1 番から n 番までの番号のついたイスが並んでいる。各イスには人が一人ずつ座っていて，最初に k 番のイスに座っていた人を k 番さんとよぶ。

1 番と 2 番のイスに座っている人がじゃんけんを行い，勝った方が 1 番のイスに，負けたほうは n 番のイスに座り，それ以外の人は 1 つ左のイスに座る。引き分けのときは誰も移動しない。この試行を 1 回とし，を繰り返し行う。

(1) $n=3$ で，2 回の試行を終えたときを考える。

(i) 左から 3 番さん，2 番さん，1 番さんの順で座っている確率は $\boxed{\text{ア}}$ である。

(ii) 1 番さんが 2 番さんより左に座っている確率は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $n-1$ 回の試行を終えたとき，n 番さんが 1 番のイスに座っている確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(3) n 回の試行を終えたとき，n 番さんが 1 番のイスに座っている確率は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(4) n 回の試行を終えたとき，n 番さんが n 番のイスに座っている確率は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(5) $n-1$ 回の試行を終えたとき，全ての人が最初と同じイスに座っている確率は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(6) n 回の試行を終えたとき，全ての人が最初と同じイスに座っている確率は $\boxed{\text{キ}}$ である。

解答

1 番と 2 番のイスに座っている人がじゃんけんを行うとき

事象 A : 1 番のイスの人が勝つ。確率は $\frac{1}{3}$

事象 B : 2 番のイスの人が勝つ。確率は $\frac{1}{3}$

事象 C : 引き分け(あいこ)。確率は $\frac{1}{3}$

とする。

(1) $n=3$ のとき

123

試行 1 回目　A↙ 132　　B↓ 231　　↘C 123

試行 2 回目

132 から：A↙ $\boxed{123}$　B↓ 321　↘C $\boxed{132}$

231 から：A↙ 213　B↓ $\boxed{312}$　↘C 231

123 から：A↙ $\boxed{132}$　B↓ 231　↘C $\boxed{123}$

(i) 左から 321 と並んでいるのは A→B の順で起こるときであるから

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}={}^{ア}\boxed{\frac{1}{9}}$

(ii) 1 番さんが 2 番さんより左にあるのは，上の図で□で囲んだ場合であるから

$\frac{1}{9}\times 5={}^{イ}\boxed{\frac{5}{9}}$

(2) A か B が起こる，つまりあいこでない限り n 番さんは 1 回の試行ごとに左にイスに移動する。

これより $n-2$ 回の試行ですべて A か B が起こった場合

1 番のイスには n 番さん以外の誰かが座っており，

2 番のイスには n 番さんが座っている

ことになる。この状態で n 番さんがじゃんけんに勝てば，1 番のイスに n 番さんが座ることになる

よって

$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\times\frac{1}{3}={}^{ウ}\boxed{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}$

(3) n 回の試行後に，n 番さんが 1 番のイスに座っているのは

◇ (2)の $n-2$ 回までの過程で，1 回だけ C が起こる

◇ (2)の $n-1$ 回の試行後に A または C が起こる

のいずれかの場合である。

よって

$${}_{n-1}\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot\frac{2}{3}={}^{エ}\boxed{\frac{n+1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}$$

(4) n 回の試行後に，n 番さんが n 番のイスに座っているのは

◇ n 回連続で C が起こる（n 番さんがずっと動かない）

◇ n 回の試行のうち，A か B が $n-2$ 回で，2 番に n 番さんが座っている状態で A が起こり，残り 1 回は C（n 番さんが 2 番までやってきて，負けて飛ばされる）

◇ $n-1$ 回の試行で(2)が起こっており，n 回目の試行で B が起こる
（n 番さんが $n-1$ 回後に 1 番にいて，負けて飛ばされる）

のいずれかの場合である。

よって

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{3}={}^{オ}\boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{n+1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}$$

(5)　$n-1$ 回の試行を終えたとき，すべての人が最初のイスに座っているのは

◇　$n-1$ 回連続で C が起こる

◇　$n-1$ 回連続で A が起こる

のいずれかである。

よって

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}={}^{カ}\boxed{2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$$

(6)　n 回の試行を終えたとき，すべての人が最初のイスに座っているのは

◇　n 回連続で C が起こる

◇　n 回連続で B が起こる

◇　$n-1$ 回 A，1 回だけ C が起こる

のいずれかである。

よって

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{3}={}^{キ}\boxed{(n+2)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}$$

参考　$n=4$ で実験してみると

1234

からはじめて，A のみが起こる場合

1234 → 1342 → 1423 → 1234

と「3 回」の試行で元の状態に戻り，B のみが起こる場合

1234 → 2341 → 3412 → 4123 → 1234

と「4 回」の試行で元の状態に戻ることがわかる。