〔1〕

A_0，A_1，A_2 を一辺の長さが 1 の正三角形の頂点とし，P_0 を辺 A_0A_1 上の点として $A_0P_0 = a_0$ $(0 < a_0 < 1)$ とする．さらに，k を自然数として，

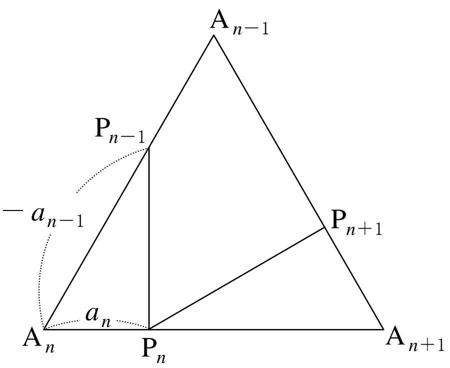
$$A_n = \begin{cases} A_0 & n = 3k \text{ のとき} \\ A_1 & n = 3k+1 \text{ のとき} \\ A_2 & n = 3k+2 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定める．辺 $A_{n-1}A_n$ 上の点 P_{n-1} が定まったとき， P_{n-1} から辺 A_nA_{n+1} に下ろした垂線の足を P_n と決め，$A_nP_n = a_n$ とする．

(1)　a_n を a_{n-1} で表せ．

(2)　$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

解答



(1)　$\angle P_{n-1}A_nP_n = \dfrac{\pi}{3}$， $\angle P_{n-1}P_nA_n = \dfrac{\pi}{2}$ より

$$1 - a_{n-1} : a_n = 2 : 1$$

が成り立つ．ゆえに，

$$2a_n = 1 - a_{n-1},$$

$$a_n = \frac{1}{2}(1 - a_{n-1}). \qquad \cdots\cdots ①$$

(2)　①より，

$$a_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_{n-1} - \frac{1}{3}\right)$$

である．ゆえに，

$$a_n - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(a_0 - \frac{1}{3}\right),$$

$$a_n = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(a_0 - \frac{1}{3}\right)$$

である．$n\to\infty$ とし， $a_n \to \dfrac{1}{3}$ を得る．すなわち

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}.$$

■

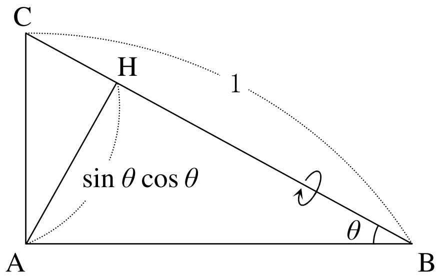
〔2〕

△ABC において$\angle A=\dfrac{\pi}{2}$，BC＝1，$\angle B=\theta$とし，面積を S，辺の長さの和を l とする．また△ABC を辺 BC の周りに 1 回転させてできる回転体 W の体積を V とする．

(1)　V を θ を用いて表せ．

(2)　$\dfrac{V}{Sl}$ が最大となるときの θ を定めよ．

解答



(1)　A から BC に下ろした垂線の足を H とする．すると，

$$AC=\sin\theta,$$
$$AB=\cos\theta,$$
$$AH=\sin\theta\cos\theta$$

である．

いま，V は半径 AH の円を底面とする高さ BC の円錐の体積に等しいので，

$$V=\frac{1}{3}\pi(\overline{AH})^2\cdot\overline{BC}$$
$$=\frac{\pi}{3}(\sin\theta\cos\theta)^2.$$

(2)　S，l を θ で表すと，

$$S=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta,$$
$$l=\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}=1+\sin\theta+\cos\theta$$

である．

すると，

$$\frac{V}{Sl}=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$$

である．

ここで，

$$t=\sin\theta+\cos\theta \qquad \cdots\cdots①$$

とおくと，

$$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

であることと θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ……② をとり得ることから t の値のとり得る範囲は，

$$-1<t\leqq\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots③$$

となる．

また，①の両辺を 2 乗して

$$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$$

であるから，

$$\frac{V}{Sl}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{t^2-1}{1+t}=\frac{\pi(t-1)}{3}$$

といえる．②，③を考え，

$$\frac{V}{Sl}\text{ が最大となる}\iff t=\sqrt{2}$$
$$\iff \theta=\frac{\pi}{4}$$

である．

■

〔3〕

m を 4 以上の自然数とする．赤玉 m 個と青玉 m 個の計 $2m$ 個の玉を袋に入れる．袋から玉を 1 個ずつ続けて 4 個取り出す．最初の 2 個の玉を取り出したとき赤玉と青玉が同数という事象を A とする．4 個の玉を取り出したとき赤玉と青玉が同数という事象を B とする．以下では事象 A が起こる確率を $P(A)$ などと表す．

(1)　確率 $P(A)$，$P(B)$ をそれぞれ m で表せ．

(2)　確率 $P(A \cap B)$ をそれぞれ m で表せ．

(3)　事象 A も B も起こらない確率を m で表せ．

解答

m 個の赤玉，m 個の青玉をすべて区別し，その $2m$ 個の中から 4 個の玉を順に取り出す方法は

$${}_{2m}\mathrm{P}_4 \text{ 通り}$$

であり，それら 1 通り 1 通りは同様に確からしいとみなせる．以下，そのもとで考える．

(1)　事象 A をみたす条件は，

「1，2 回目に赤，青を 1 個ずつ取り出す」

ことと同値である．その事象は，

- どの赤玉を 1 個取り出すか　(∶ ${}_m\mathrm{C}_1$ 通り)，
- どの青玉を 1 個取り出すか　(∶ ${}_m\mathrm{C}_1$ 通り)，
- 上の 2 つの玉を 1 回目か 2 回目かどちらで出すか　(∶ ${}_2\mathrm{C}_1$ 通り)，
- 3，4 回目は任意の玉を取り出す　(∶ ${}_{2m-2}\mathrm{P}_2$ 通り)

の積事象として生成でき，その場合の数は，

$${}_m\mathrm{C}_1 \cdot {}_m\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_{2m-2}\mathrm{P}_2 = 2m^2(2m-2)(2m-3).$$

ゆえに，

$$P(A) = \frac{2m^2(2m-2)(2m-3)}{{}_{2m}\mathrm{P}_4} = \frac{m}{2m-1}.$$

次に，事象 B をみたす条件は，

「1〜4 回目で赤，青を 2 個ずつ取り出す」

ことと同値である．その事象は，

- どの赤玉を 2 個取り出すか　(∶ ${}_m\mathrm{C}_2$ 通り)，
- どの青玉を 2 個取り出すか　(∶ ${}_m\mathrm{C}_2$ 通り)，
- 選んだ 4 個をどの順に取り出すか　(∶ ${}_4\mathrm{P}_4$ 通り)

の積事象として生成でき，その場合の数は，

$${}_m\mathrm{C}_2 \cdot {}_m\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{P}_4 = 6m^2(m-1)^2.$$

ゆえに，

$$P(B) = \frac{6m^2(m-1)^2}{{}_{2m}\mathrm{P}_4} = \frac{3m(m-1)}{2(2m-1)(2m-3)}.$$

(2)　事象 $A \cap B$ をみたす条件は，

「1，2 回目に赤，青を 1 個ずつ取り出し，
3，4 回目に赤，青を 1 個ずつ取り出す」

ことと同値である．その事象は，

- どの赤玉を 2 個取り出すか　(∶ ${}_m\mathrm{C}_2$ 通り)，
- どの青玉を 2 個取り出すか　(∶ ${}_m\mathrm{C}_2$ 通り)，
- 選んだ 4 個を 1，2 回目が異なる色，3，4 回目が異なる色の玉となるように並べ替える　(∶ $({}_2\mathrm{C}_1)^4$ 通り)

の積事象として生成でき，その場合の数は，

$${}_m\mathrm{C}_2 \cdot {}_m\mathrm{C}_2 \cdot ({}_2\mathrm{C}_1)^4 = 4m^2(m-1)^2.$$

ゆえに，

$$P(A \cap B) = \frac{4m^2(m-1)^2}{{}_{2m}\mathrm{P}_4} = \frac{m(m-1)}{(2m-1)(2m-3)}.$$

(3)　事象 A の否定を $\overline{A}$ などと表すとする．求める確率は，$P(\overline{A} \cap \overline{B})$ と表せる．

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} \\ &= \frac{3(m-1)(m-2)}{2(2m-1)(2m-3)}. \end{aligned}$$

■

〔 4 〕

a，b，c はいずれも正の有理数であるとする．

(1)　$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ が有理数ならば，$\sqrt{a}$ も $\sqrt{b}$ も有理数であることを示せ．

(2)　$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ が有理数ならば，$\sqrt{a}$ も $\sqrt{b}$ も $\sqrt{c}$ も有理数であることを示せ．

解答

(1)　$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ が有理数であるから，r を有理数として

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=r$$

とおける．

すると，$\sqrt{a}=r-\sqrt{b}$ であり，この両辺を 2 乗し

$$(\sqrt{a})^2=(r-\sqrt{b})^2,$$

$$a=r^2-2r\sqrt{b}+b$$

がいえる．ここで，$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ は正であるから，r は正の数で，上式は以下と変形できる．

$$\sqrt{b}=\frac{r^2-a+b}{2r}$$

すると，a，b，r はすべて有理数であるから，

$\sqrt{b}$ は有理数

といえる．

さらに，$\sqrt{a}=r-\sqrt{b}$ とあわせ，

$\sqrt{a}$ は有理数

といえる．

(2)　$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ が正の有理数であるから，s を有理数，$s>0$ として，

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=s$$

とおける．

すると，$\sqrt{a}+\sqrt{b}=s-\sqrt{c}$ であり，この両辺を 2 乗し

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(s-\sqrt{c})^2,$$

$$a+b+2\sqrt{ab}=r^2-2s\sqrt{c}+c,$$

$$\sqrt{4ab}+\sqrt{4s^2c}=r^2+c-a-b$$

がいえる．ここで，$4ab$，$4s^2c$，$r^2+c-a-b$ が有理数であるから，(1)の結果から

$\sqrt{4ab}$，$\sqrt{4s^2c}$ は共に有理数

である．

すると，$\sqrt{4s^2c}=2s\sqrt{c}$ であり，$2s(>0)$ が有理数であることを考慮すると，

$\sqrt{c}$ は有理数

といえる．

このもとで，$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ が有理数といえるので，(1)の結果から

$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$ は共に有理数

もいえる．

■

研究

1°　係数がすべて有理数の多項式 $f(x)$ に対し，方程式 $f(x)=0$ が $x=p+q\sqrt{\alpha}$ (p，$q(\neq 0)$，α が有理数，$\sqrt{\alpha}$ が無理数) を解にもつなら，$x=p-q\sqrt{\alpha}$ も解にもつ．この事実の証明において，$f(x)$ を

$$\{x-(p+q\sqrt{\alpha})\}\{x-(p-q\sqrt{\alpha})\}$$

$$=x^2-2px+p^2+q^2\alpha\ (=g(x) \text{とおく})$$

で割った余りを考え，その余りを $tx+u$ とおくと，$g(x)$ が有理数係数であることから，t，u が有理数，$Q(x)$ を有理数係数の多項式として

$$f(x)=g(x)Q(x)+tx+u$$

とかける．$x=p+q\sqrt{\alpha}$ が $f(x)=0$ の解の 1 つで $f(p+q\sqrt{\alpha})=0$ が成り立つ．すると，

$$f(p+q\sqrt{\alpha})=0$$

$$\Leftrightarrow\ t(p+q\sqrt{\alpha})+u=0$$

$$\Leftrightarrow\ (pt+u)+tq\sqrt{\alpha}=0$$

$$\Leftrightarrow\ pt+u=0 \text{ かつ } tq=0$$

(∵ $tq\neq 0$ なら $\sqrt{\alpha}$ が有理数といえ不合理)

$$\Leftrightarrow\ t=u=0$$

といえ，$f(x)=g(x)Q(x)$ と表されることが示せ，$x=p-q\sqrt{\alpha}$ が $f(x)=0$ の解といえる．

この流れを利用すると，(1)，(2)ともに背理法を用いて解くことができる．

・(1)では，

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ が有理数である ならば $\sqrt{a}$ が有理数であることを $\sqrt{a}$ が無理数と仮定して矛盾を示す．

r を有理数として

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=r$$

とおける．ここで，

$$f(x)=(x-\sqrt{b})(x+\sqrt{b})=x^2-b \quad \cdots\cdots \text{①}$$

を考えると，

$$f(r-\sqrt{a})=f(\sqrt{b})=0$$

であり，$f(x)$ は有理数係数の多項式であるから，

$$f(r+\sqrt{a})=0$$

のはずである．ところが，①より，

$$f(r+\sqrt{a})=4\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})>0$$

で矛盾する．

・(2)では，

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ が有理数であるならば $\sqrt{a}$ が有理数であることを $\sqrt{a}$ が無理数と仮定して矛盾を示す．

s を有理数として

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=s$$

とおける．ここで，

$$\begin{aligned}g(x)&=\{x-(\sqrt{b}+\sqrt{c})\}\{x-(\sqrt{b}-\sqrt{c})\}\\&\quad\cdot\{x-(-\sqrt{b}+\sqrt{c})\}\{x-(-\sqrt{b}-\sqrt{c})\} \quad \cdots\cdots \text{②}\\&=\{(x-\sqrt{b})^2-c\}\{(x+\sqrt{b})^2-c\}\\&=(x^2+b-c-2\sqrt{b}x)(x^2+b-c+2\sqrt{b}x)\\&=(x^2+b-c)^2-4bx^2\end{aligned}$$

を考えると，

$$g(s-\sqrt{a})=g(\sqrt{b}+\sqrt{c})=0$$

であり，$g(x)$ は有理数係数の多項式であるから，

$$g(s+\sqrt{a})=0$$

のはずである．ところが，②より，

$$\begin{aligned}g(s+\sqrt{a})&=16\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})\\&\quad\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})>0\end{aligned}$$

で矛盾する．

■

〔5〕

n を 0 以上の整数として，次のようにおく．

$$c_n(x)=\int_0^x t^n \cos t\,dt\,,\quad s_n(x)=\int_0^x t^n \sin t\,dt\,,\quad f_n(x)=\int_0^x t^n \cos(x-t)\,dt\,.$$

(1)　$n \geqq 1$ のとき，$c_n(x)$，$s_n(x)$ を $c_{n-1}(x)$，$s_{n-1}(x)$ を用いて表せ．

(2)　$n \geqq 2$ のとき，$f_n(x)$ を $f_{n-2}(x)$ を用いて表せ．

(3)　$\displaystyle\int_0^x h(t)\cos(x-t)\,dt=x^3$ を満たす多項式 $h(t)$ があれば，その一例を求めよ．

解答

(1)

$$\begin{aligned}c_n(x)&=\Big[t^n \sin t\Big]_0^x-\int_0^x nt^{n-1}\sin t\,dt\\&=x^n\sin x-ns_{n-1}(x)\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_n(x)&=\Big[t^n(-\cos t)\Big]_0^x-\int_0^x nt^{n-1}(-\cos t)\,dt\\&=-x^n\cos x+nc_{n-1}(x)\,.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}f_n(x)&=\Big[t^n\{-\sin(x-t)\}\Big]_0^x\\&\qquad-\int_0^x nt^{n-1}\{-\sin(x-t)\}\,dt\\&=\Big[t^n\{-\sin(x-t)\}\Big]_0^x\\&\qquad-\Big[nt^{n-1}\{-\cos(x-t)\}\Big]_0^x\\&\qquad+\int_0^x n(n-1)t^{n-2}\{-\cos(x-t)\}\,dt\\&=nx^{n-1}-n(n-1)f_{n-2}(x)\,.\end{aligned}$$

(3)　(2) より，$n \geqq 2$ なる任意の自然数 n で，

$$f_n(x)+n(n-1)f_{n-2}(x)=nx^{n-1}\qquad\cdots\cdots ①$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned}&①\\\Leftrightarrow\ &\int_0^x t^n\cos(x-t)\,dt+\int_0^x n(n-1)t^{n-2}\cos(x-t)\,dt\\&\qquad\qquad=nx^{n-1}\\\Leftrightarrow\ &\int_0^x\{t^n+n(n-1)t^{n-2}\}\cos(x-t)\,dt=nx^{n-1}\\\Leftrightarrow\ &\int_0^x\left\{\frac{t^n}{n}+(n-1)t^{n-2}\right\}\cdot\cos(x-t)\,dt=x^{n-1}\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots ②$$

であり，②は $n \geqq 2$ なる任意の自然数 n で成り立つので，$n=4$ でも成り立つ．

ゆえに，

$$\int_0^x\left(\frac{t^4}{4}+3t^2\right)\cos(x-t)\,dt=x^3$$

が成り立つ．

これは，$\displaystyle\int_0^x h(t)\cos(x-t)\,dt=x^3$ ……(*) をみたす多項式 $h(t)$ の一例が

$$h(t)=\frac{t^4}{4}+3t^2$$

であることを示す．

研究

1°　(2) では，部分積分を 2 回利用して解答したが，加法定理を用いることで，(1) を利用することができる．以下に示す．

$$\begin{aligned}f_n(x)&=\int_0^x t^n(\cos x\cos t+\sin x\sin t)\,dt\\&=\cos x\int_0^x t^n\cos t\,dt+\sin x\int_0^x t^n\sin t\,dt\\&=c_n(x)\cos x+s_n(x)\sin x\qquad\cdots\cdots ③\end{aligned}$$

となる．さらに，

$$\begin{aligned}&c_n(x)\cos x+s_n(x)\sin x\\&=\{x^n\sin x-ns_{n-1}(x)\}\cos x\\&\qquad+\{-x^n\cos x+nc_{n-1}(x)\}\sin x\\&=-n\cos x\,s_{n-1}(x)+n\sin x\,c_{n-1}(x)\\&=-n\cos x\{-x^{n-1}\cos x+(n-1)c_{n-2}(x)\}\\&\qquad+n\sin x\{x^{n-1}\sin x-(n-1)s_{n-2}(x)\}\\&=nx^{n-1}-n(n-1)\{c_{n-2}(x)\cos x+s_{n-2}(x)\sin x\}\\&=nx^{n-1}-n(n-1)f_{n-2}(x)\quad(\because\ ③)\qquad\cdots\cdots ④\end{aligned}$$

となり，③，④より結果が導ける．

2° (3)では,

「(*)をみたす多項式 $h(t)$ の一例を挙げよ.」

という問いであったため,(*)をみたす多項式 $h(t)$ を 1 つ見つけるだけに終わったが,$h(t)$ が t で微分可能な関数ならば,(*)をみたす $h(t)$ は,

$$\text{多項式 } h(t)=\frac{t^4}{4}+3t^2$$

で一意であることがいえる.以下に示す.

(*)から,

$$\cos x\int_0^x h(t)\cos t\,dt+\sin x\int_0^x h(t)\sin t\,dt=x^3 \quad \cdots\cdots ⑤$$

となる.この両辺を x で微分し,

$$-\sin x\int_0^x h(t)\cos t\,dt+h(x)\cos^2 x$$
$$+\cos x\int_0^x h(t)\sin t\,dt+h(x)\sin^2 x=3x^2,$$

$$-\sin x\int_0^x h(t)\cos t\,dt$$
$$+\cos x\int_0^x h(t)\sin t\,dt+h(x)=3x^2 \quad \cdots\cdots ⑥$$

が成り立つ.さらに,この両辺を x で微分し,

$$-\cos x\int_0^x h(t)\cos t\,dt-h(x)\sin x\cos x$$
$$-\sin x\int_0^x h(t)\sin t\,dt+h(x)\sin x\cos x$$
$$+h'(x)=6x$$

がいえ,⑤から,

$$-x^3+h'(x)=6x,$$
$$h'(x)=x^3+6x$$

がいえる.また,⑥から $h(0)=0$ が導け,

$$h(t)=\int_0^t h'(x)\,dx+h(0)$$
$$=\int_0^t (x^3+6x)\,dx+0$$
$$=\frac{t^4}{4}+3t^2$$

と導けた(試験中にここまで示す必要はない.問が「一例を挙げよ.」となっているので解答程度の記述を出題者は求めているであろう.).

■

講評

〔1〕図形絡みの数列

問題の設定が少し複雑に見えるが,位置に関係なく漸化式が導けることにさえわかればそれほど難しい問題ではなかったはずである.(1)の漸化式の一般項を求めれば(2)の極限も直ちに求まる.

〔2〕図形絡みの三角関数

(1)は辺の長さを三角関数で表すだけである.(2)は,扱うべき式が $\sin\theta$,$\cos\theta$ の対称式であるから $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくという定石の処理となる.

〔3〕確率,集合の要素数の計算

(1),(2)は状況を把握さえできれば,それほど難しい問題とはいえないが,その状況を上手に把握できたが鍵となったであろう.(3)は否定をとると(1),(2)が利用できる形になる.

〔4〕有理数絡みの論証

(1)の結果をいかにして(2)に適用できるかを工夫する方法に気づけるかが鍵であろう.3 つのルートの和を上手に特定の条件をみたす 2 つのルートの和と見ることのできるように変形することができればスムーズに証明できたはずである.

〔5〕積分方程式

(1),(2)は部分積分で漸化式を立てる定石の問題である.ただ,解き慣れている人にとっては(2)は 2 回部分積分を行うと結果が導けるので,(1)がなぜあるのか迷う可能性はある.(3)では(2)の結果の式を利用できるかが鍵であるが,多少気づきにくいかもしれない.

昨年と比較して,難易度は下がり,分量も減り,一見解きやすいセットになってはいるが,どこか趣深いテーマを含んでいる問題が後半の〔4〕,〔5〕に配置されているのがにくいところか.

〔1〕～〔3〕は完答し,〔4〕(1),〔5〕(1)と(2)から部分点をあわせて目標は 80%というところか.

■