$\boxed{1}$ 次の問い（**問 1 〜 3**）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

問 1　200 以下のすべての正の偶数の積を計算すると，数値の末尾には 0 が連続して $\boxed{1}\boxed{2}$ 個並ぶ。200 以下のすべての正の奇数の積を計算すると，数値の末尾の数字は $\boxed{3}$ である。

問 2　ある集団で 5 人に 1 人がかかる病気がある。この集団に属する A さんがその病気に関する検査を受けたところ，陽性の結果が出た。その病気にかかっている人がこの検査で正しく陽性と判定される確率は 90 % で，かかっていない人が誤って陽性と判定される確率は 5 % である。A さんがこの病気に**かかっていない**確率は $\boxed{4}\boxed{5}$ % である。

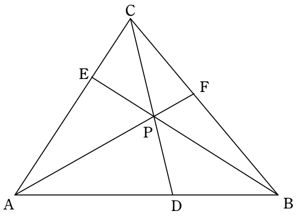
問 3　図のように，△ABC において，辺 AB を 3 : 2 に内分する点を D，辺 AC を 2 : 1 に内分する点を E，BE と CD の交点を P，BC と AP の延長との交点を F とする。このとき，

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AF}}=\frac{\boxed{6}}{\boxed{7}}$$

である。また，△ABC，△BCP，△CAP の面積をそれぞれ I，J，K とおくと，

$$I:J:K=\frac{\boxed{8}}{\boxed{9}}:\frac{\boxed{10}}{\boxed{11}}:1$$

である。



解説

問 1　1 から 200 までの正の偶数のうち

10 で割り切れるものは　20 個

50 で割り切れるものは　4 個

あるから，末尾には

$20+4=\boxed{2}\boxed{4}$ 個

の 0 が並ぶ。

注意　偶数という指定がない場合

5 で割り切れるものは　40 個

25 で割り切れるものは　8 個

125 で割り切れるものは　1 個

と調べるよくある問題である。この問では偶数の積であるため奇数である

5，25，125

などはカウントしてはいけないため，上のような解答になる。

また

$1\times3\times5\times7\times9=945$

であることから，200 以下の正の奇数の積の 1 の位は

5^{20}

の 1 の位に等しいため $\boxed{5}$ である。

問 2　事象 X，Y を

X : この病気にかかる

Y : 検査で陽性と判定される

と定める。求める確率は，条件つき確率

$$P_Y(\overline{X})=\frac{P(\overline{X}\cap Y)}{P(Y)}$$

である。

$$P(Y)=\frac{1}{5}\cdot\frac{90}{100}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{100}=\frac{110}{500}$$

$$P(\overline{X}\cap Y)=\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{100}=\frac{20}{500}$$

より

$$P_Y(\overline{X})=\frac{\frac{20}{500}}{\frac{110}{500}}=\frac{2}{11}=0.1818\cdots$$

であるから，小数第一位を四捨五入して（問題冊子に指示があると思われる）

$\boxed{1}\boxed{8}$ %

となる。

問 3　チェバの定理より

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$$

各辺の比を代入して

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}=\frac{4}{3}$$

が得られる。さらにメネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CF}}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PA}}=1$$

同様に

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PA}}=1$$

$$\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PA}}=\frac{2}{7}$$

が得られるから

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AF}}=\frac{\boxed{7}}{\boxed{9}}$$

となる。

また，△ABC の面積を S とおくと

$$I:J:K=\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{9}S:\frac{2}{9}S:\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{9}S$$

$$=4:2:3$$

$$=\frac{\boxed{4}}{\boxed{3}}:\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}:1$$

となる。

$\boxed{2}$ 次の文章を読み，下の問い（**問 1，2**）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

c を定数とし，x の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=-x^4+2x^2-cx$$

とする。

問 1　$f(x)$ が極小値を持つための必要十分条件は,

$$\frac{\boxed{12}\boxed{13}\sqrt{\boxed{14}}}{\boxed{15}}<c<\frac{\boxed{16}\sqrt{\boxed{17}}}{\boxed{18}}$$

である。これが満たされているとき，極小値をとる x の範囲は

$$\frac{\boxed{19}\sqrt{\boxed{20}}}{\boxed{21}}<x<\frac{\sqrt{\boxed{22}}}{\boxed{23}}$$

である。

問 2　$f(x)$ が $x=\dfrac{1}{2}$ で極小値をとるとき，最大値は

$$\frac{1}{\boxed{24}\boxed{25}}\left(\boxed{26}\boxed{27}+\boxed{28}\boxed{29}\sqrt{\boxed{30}\boxed{31}}\right)$$

であり，それを与える x の値は

$$x=-\frac{1}{\boxed{32}}\left(\boxed{33}+\sqrt{\boxed{34}\boxed{35}}\right)$$

である。

解説

問 1　$f(x)=-x^4+2x^2-cx$

$f'(x)=-4x^3+4x-c$

であり，$f(x)$ が極小値をもつためには,

$f'(x)=0$ が実数解をもち，かつ，その前後で $f'(x)$ の符号が負から正に変わる　…(＊)

ことが必要十分である。

そこで

$f'(x)=0$

を

$-4x^3+4x=c$

と変形し

$g(x)=-4x^3+4x$

とおくと

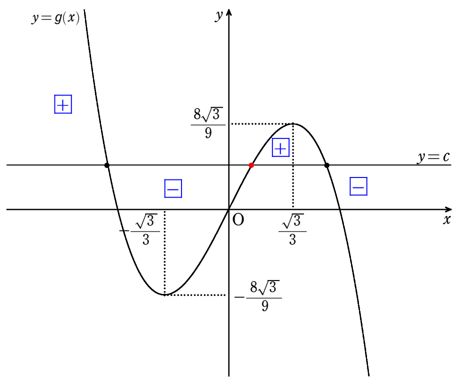
$f'(x)=0$ が実数解をもつ　$\Leftrightarrow$　$y=g(x)$ と $y=c$ が共有点をもつ

である。$g(x)$ は奇関数であり

$$g'(x)=-12x^2+4=-12\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-4\cdot\frac{1}{3\sqrt{3}}+4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{9}$$

より，次の図を得る。



したがって

$$(＊)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{{}^{12}\boxed{-}\,{}^{13}\boxed{8}\sqrt{{}^{14}\boxed{3}}}{{}^{15}\boxed{9}}<c<\frac{{}^{16}\boxed{8}\sqrt{{}^{17}\boxed{3}}}{{}^{18}\boxed{9}}$$

である。（図の青色で表した符号は $f'(x)=g(x)-c$ の符号である）

また，これを満たすときの図の赤点の x 座標の範囲が，極小値をとる x の範囲であるから

$$\frac{{}^{19}\boxed{-}\sqrt{{}^{20}\boxed{3}}}{{}^{21}\boxed{3}}<x<\frac{\sqrt{{}^{22}\boxed{3}}}{{}^{23}\boxed{3}}$$

となる。

問 2　$x=\dfrac{1}{2}$ で極小値をとるから

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=-4\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{2}-c=0$$

より

$$c=\frac{3}{2}$$

を得る。

このとき

$$f(x)=-x^4+2x^2-\frac{3}{2}x$$

$$\begin{aligned}f'(x)&=-4x^3+4x-\frac{3}{2}\\&=-\frac{1}{2}(8x^3-8x+3)\\&=-\frac{1}{2}(2x-1)(4x^2+2x-3)\end{aligned}$$

である。

$4x^2+2x-3=0$

を解くと

$$x=\frac{-1-\sqrt{13}}{4},\quad\frac{-1+\sqrt{13}}{4}$$

であり

$$\alpha=\frac{-1-\sqrt{13}}{4},\quad\beta=\frac{-1+\sqrt{13}}{4}$$

とおくと，$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

これより，最大値は

$f(\alpha)$　または　$f(\beta)$

である。（マークの形から $f(\alpha)$ とわかる）

そこで

$f(x)$ を $4x^2+2x-3$ で割ると

（筆算は省略）

$$f(x)=(4x^2+2x-3)\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}\right)-\frac{13}{8}x+\frac{3}{4}$$

となるから

$$f(\alpha)=-\frac{13}{8}\alpha+\frac{3}{4}=-\frac{13}{8}\cdot\frac{-1-\sqrt{13}}{4}+\frac{3}{4}=\frac{37+13\sqrt{13}}{32}$$

$$f(\beta)=-\frac{13}{8}\beta+\frac{3}{4}=-\frac{13}{8}\cdot\frac{-1+\sqrt{13}}{4}+\frac{3}{4}=\frac{37-13\sqrt{13}}{32}$$

が求まる。

$f(\alpha)>f(\beta)$

であるから

最大値は

$$\frac{1}{{}^{24}\boxed{3}\,{}^{25}\boxed{2}}\left({}^{26}\boxed{3}\,{}^{27}\boxed{7}+{}^{28}\boxed{1}\,{}^{29}\boxed{3}\sqrt{{}^{30}\boxed{1}\,{}^{31}\boxed{3}}\right)$$

であり，それを与える x の値は

$$x=\alpha=-\frac{1}{{}^{32}\boxed{4}}\left({}^{33}\boxed{1}+\sqrt{{}^{34}\boxed{1}\,{}^{35}\boxed{3}}\right)$$

である。

$\boxed{3}$ 下の文章を読み，下の問い（**問 1 ～ 3**）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

k を自然数とし，

$$T_k=\int_0^1 t^{k-1}(1-t)^3dt$$

とする。

問 1　$T_3=\dfrac{\boxed{36}}{\boxed{37}\boxed{38}}$ である。

問 2　任意の自然数 n について

$$\sum_{k=1}^{n}T_k=\frac{\boxed{39}}{\boxed{40}}-\frac{\boxed{41}}{(n+\boxed{42})(n+\boxed{43})(n+\boxed{44})}$$

である。ただし，$\boxed{42}<\boxed{43}<\boxed{44}$ とする。

問 3　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}T_k=\frac{\boxed{45}}{\boxed{46}}$ である。

解説

問 1

$$\begin{aligned}T_3&=\int_0^1 t^2(1-t)^3dt\\&=\int_0^1 t^2(1-3t+3t^2-t^3)dt\\&=\int_0^1(t^2-3t^3+3t^4-t^5)dt\\&=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{4}t^4+\frac{3}{5}t^5-\frac{1}{6}t^6\right]_0^1\\&=\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{5}-\frac{1}{6}\\&=\frac{{}^{36}\boxed{1}}{{}^{37}\boxed{6}\,{}^{38}\boxed{0}}\end{aligned}$$

問 2

$$\begin{aligned}T_k&=\int_0^1 t^{k-1}(1-t)^3dt\\&=\int_0^1 t^{k-1}(1-3t+3t^2-t^3)dt\\&=\int_0^1(t^{k-1}-3t^k+3t^{k+1}-t^{k+2})dt\\&=\left[\frac{1}{k}t^k-\frac{3}{k+1}t^{k+1}+\frac{3}{k+2}t^{k+2}-\frac{1}{k+3}t^{k+3}\right]_0^1\\&=\frac{1}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{3}{k+2}-\frac{1}{k+3}\\&=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-2\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)\end{aligned}$$

である。それぞれ

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}$$

となるから，この結果より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}T_k&=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)\\&=\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}-\frac{1}{n+3}\\&=\frac{{}^{39}\boxed{1}}{{}^{40}\boxed{3}}-\frac{{}^{41}\boxed{2}}{(n+{}^{42}\boxed{1})(n+{}^{43}\boxed{2})(n+{}^{44}\boxed{3})}\end{aligned}$$

が得られる。

問 3

$$\sum_{k=1}^{\infty}T_k=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{3}-\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}=\frac{{}^{45}\boxed{1}}{{}^{46}\boxed{3}}$$

$\boxed{4}$ 下の文章を読み，下の問い（**問 1 ～ 3**）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

必要があれば，$\log_e 10 = 2.3$，$\log_{10} 2 = 0.30$ を用いること。

太陽から地球に降り注ぐ光は，深海の底にはほとんど届かない。海面に光が当たっているとしても，水深とともに辺りは暗くなる。一般に，光は空気や水などの物質で満たされた空間を通ると，距離とともに明るさが減少する。

いま，ある物質で満たされた空間を光が進む距離を x とし，そこで光の明るさを $I(x)$ と表す。$I(x)$ は $I(x) = I(0)f(x)$ と書けて，$f(x)$ は x の指数関数であるものとする。さらに，$f(10) = \dfrac{1}{10}$ であるものとする。

問 1 $f(x) = \dfrac{1}{2}$ となるのは

$$x = \boxed{47}\,.\,\boxed{48}$$

のときである。

問 2 $f(x) = \dfrac{1}{e}$ となるのは

$$x = \boxed{49}\,.\,\boxed{50}$$

のときである。

問 3 $|h| \fallingdotseq 0$ のときに成り立つ 1 次の近似式 $e^{-h} \fallingdotseq 1 - h$ を用いると

$$f(1) \fallingdotseq 0.\boxed{51}\boxed{52}$$

である。

（解説）

問 1　$f(x) = a^x \ (a > 0,\ a \neq 1)$

とおく。

$$f(10) = \frac{1}{10}$$

すなわち

$$a^{10} = \frac{1}{10}$$

の両辺，自然対数をとって

$$\log_e a^{10} = \log_e \frac{1}{10}$$

$$10\log_e a = -\log_e 10$$

より

$$\log_e a = -\frac{\log_e 10}{10} \quad \cdots①$$

が得られる。このとき

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

すなわち

$$a^x = \frac{1}{2}$$

の両辺，自然対数をとって

$$\log_e a^x = \log_e \frac{1}{2}$$

$$x\log_e a = -\log_e 2$$

$$x\log_e a = -\frac{\log_{10} 2}{\log_{10} e}$$

①より

$$x\left(-\frac{\log_e 10}{10}\right) = -\frac{\log_{10} 2}{\log_{10} e}$$

$$x = \frac{10\log_{10} 2}{\log_e 10 \cdot \log_{10} e}$$

$$x = 10\log_{10} 2$$

$$x = {}^{47}\boxed{3}\,.\,{}^{48}\boxed{0}$$

となる。

（$\log_e 10$ と $\log_{10} e$ は逆数の関係である）

問 2　$f(x) = \dfrac{1}{e}$

すなわち

$$a^x = \frac{1}{e}$$

両辺，自然対数をとって

$$\log_e a^x = \log_e \frac{1}{e}$$

$$x\log_e a = -1$$

①より

$$x\left(-\frac{\log_e 10}{10}\right) = -1$$

$$x = \frac{10}{\log_e 10}$$

$$x = \frac{10}{2.3} = 4.347\cdots$$

小数第 2 位を四捨五入して

$$x = {}^{49}\boxed{4}\,.\,{}^{50}\boxed{3}$$

となる。

問 3　$f(1) = a$

である。①より

$$a = e^{-h} \quad ただし \quad h = \frac{\log_e 10}{10}$$

とかける。

$$|h| = \left|\frac{\log_e 10}{10}\right| = 0.23$$

より，$|h| \fallingdotseq 0$ を満たしている（そう考えざるを得ない）として与えられた近似式を用いると

$$\begin{aligned} f(1) &= a \\ &= e^{-h} \\ &\fallingdotseq 1 - h \end{aligned}$$

$h = 0.23$ を代入して

$$\begin{aligned} &= 1 - 0.23 \\ &= 0.{}^{51}\boxed{7}{}^{52}\boxed{7} \end{aligned}$$

となる。