2020 福岡大学（数学）解答解説

［Ⅰ］ 次の$\boxed{}$をうめよ。答は解答用紙の該当欄に記入せよ。

(i) 方程式 $2|z-i|=|z+5i|$ をみたす複素数 z 全体を C とおくとき，C は複素数平面上の円を表す。このとき，円 C の中心は$\boxed{(1)}$である。また，円 C 上の複素数 z の絶対値を r とし，偏角を θ とするとき，r を θ で表すと $r=\boxed{(2)}$ である。
ただし，i は虚数単位とする。

(ii) n，m を正の整数とする。20! は 2^n で割り切れるが 2^{n+1} で割り切れない。このとき，n の値は$\boxed{(3)}$である。$(1+2x)^{50}$ の展開式における x^{20} の項の係数は 2^m で割り切れるが 2^{m+1} で割り切れない。このとき，m の値は$\boxed{(4)}$である。

(iii) 曲線 $y=x^3-3\sqrt{2}x+2\sqrt{2}+1$ を x 軸方向に $\sqrt{2}$ だけ平行移動して得られる曲線の方程式は$\boxed{(5)}$である。また，3次方程式 $x^3-3\sqrt{2}x+2\sqrt{2}+1=0$ の実数解は$\boxed{(6)}$である。

解答

(i) $2|z-i|=|z+5i|$

を両辺2乗して

$4(z-i)(\overline{z-i})=(z+5i)(\overline{z+5i})$

$\iff 4(z-i)(\overline{z}+i)=(z+5i)(\overline{z}-5i)$

$\iff 4(z\overline{z}+iz-i\overline{z}+1)=z\overline{z}-5iz+5i\overline{z}+25$

$\iff 3z\overline{z}+9iz-9i\overline{z}=21$

$\iff z\overline{z}+3iz-3i\overline{z}=7$

$\iff (z-3i)(\overline{z}+3i)+9i^2=7$

$\iff (z-3i)(\overline{z-3i})=16$

$\iff |z-3i|^2=16$

より

$|z-3i|=4$

であるから，円 C の中心は

$^{(1)}\boxed{3i}$

である。また

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0)$

とおくと

$|z-3i|^2=|r\cos\theta+i(r\sin\theta-3)|^2=(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta-3)^2$

であるから

$(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta-3)^2=16$

$\iff r^2-6\sin\theta\, r-7=0$

解の公式より

$r=3\sin\theta\pm\sqrt{9\sin^2\theta+7}$

$r>0$ であるから

$r=^{(2)}\boxed{3\sin\theta+\sqrt{9\sin^2\theta+7}}$

(ii) 20! の素因数分解に含まれる2の個数を求めればよい。

1から20に含まれる

2の倍数の個数は10個
4の倍数の個数は5個
8の倍数の個数は2個
16の倍数の個数は1個

であるから，$n=10+5+2+1=^{(3)}\boxed{18}$

次に

$(1+2x)^{50}$

の展開式における x^{20} の係数は

${}_{50}\mathrm{C}_{20}\cdot 2^{20}$

である。

${}_{50}\mathrm{C}_{20}=\dfrac{50!}{20!30!}$

について，(3) と同様に考える。

1から50に含まれる

2の倍数の個数は25個
4の倍数の個数は12個
8の倍数の個数は6個
16の倍数の個数は3個
32の倍数の個数は1個

より 50! に含まれる素因数2は $25+12+6+3+1=47$ 個

1から30に含まれる

2の倍数の個数は15個
4の倍数の個数は7個
8の倍数の個数は3個
16の倍数の個数は1個

より 30! に含まれる素因数2は $15+7+3+1=26$ 個

これと 2^{20} を考慮すれば

$m=(47-26-18)+20=^{(4)}\boxed{23}$

(iii) $y=(x-\sqrt{2})^3-3\sqrt{2}(x-\sqrt{2})+2\sqrt{2}+1$

$=(x^3-3\sqrt{2}x^2+6x-2\sqrt{2})-3\sqrt{2}x+6+2\sqrt{2}+1$

$=^{(5)}\boxed{x^3-3\sqrt{2}x^2+(6-3\sqrt{2})x+7}$

である。次に，方程式

$x^3-3\sqrt{2}x+2\sqrt{2}+1=0$ …①

の実数解を求めるため，方程式

$x^3-3\sqrt{2}x^2+(6-3\sqrt{2})x+7=0$ …②

について考える。②は $x=-1$ が解であることを見つければ

$(x+1)\{x^2-(1+3\sqrt{2})x+7\}=0$

と変形できる。

$x^2-(1+3\sqrt{2})x+7=0$

の判別式は

$(1+3\sqrt{2})^2-4\cdot 7=6\sqrt{2}-9<0$

であるから，②は実数解

$x=-1$

をもつ。したがって，①の実数解は

$x=^{(6)}\boxed{-1-\sqrt{2}}$

である。

［Ⅱ］　次の$\boxed{}$をうめよ。答は解答用紙の該当欄に記入せよ。

(i)　下の表は，4人の生徒A，B，C，Dの100点満点の数学と英語のテストの得点である。ただし，単位は点とする。このとき，数学のテストの得点の分散は$\boxed{(1)}$である。

また，英語のテストの得点の中央値が$100-\dfrac{x}{3}$であるとき，数学と英語のテストの得点の共分散は$\boxed{(2)}$である。

	A	B	C	D
数学のテストの得点	85	90	60	65
英語のテストの得点	80	70	90	x

(ii)　$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}$のとき，関数$y=\dfrac{1}{\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$の最小値は$\boxed{(3)}$である。

また，定積分$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)}dx$の値は$\boxed{(4)}$である。

解答

(i)　数学のテストの得点の平均は

$$\frac{85+90+60+65}{4}=75\text{ 点}$$

である。よって，数学のテストの得点の偏差は順に

$+10,\ +15,\ -15,\ -10$

である。したがって，数学のテストの得点の分散は

$$\frac{(+10)^2+(+15)^2+(-15)^2+(-10)^2}{4}={}^{(1)}\boxed{162.5}$$

また，英語のテストの得点を小さい順に並べる方法は

(a)　x，70，80，90

(b)　70，80，90，x

(c)　70，x，80，90

(d)　70，80，x，90

のいずれかである。

(a)のとき，中央値は75である。

$$100-\frac{x}{3}=75$$

とすると

$x=75$

となり不適。

(b)のとき，中央値は85である。

$$100-\frac{x}{3}=85$$

とすると

$x=45$

となり不適。

(c)(d)のとき，中央値は$\dfrac{x+80}{2}$である。

$$100-\frac{x}{3}=\frac{x+80}{2}$$

とすると

$x=72$

となり(c)の場合を満たす。このとき，英語のテストの得点の平均は

$$\frac{80+70+90+72}{4}=78$$

であるから，数学と英語の得点の偏差をまとめると次のようになる

	A	B	C	D
数学の得点の偏差	$+10$	$+15$	-15	-10
英語の得点の偏差	$+2$	-8	$+12$	-6
偏差の積	$+20$	-120	-180	$+60$

したがって，数学と英語のテストの得点の共分散は

$$\frac{+20-120-180+60}{4}={}^{(2)}\boxed{-55}$$

(ii)　$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}\iff\dfrac{\pi}{6}\leqq 2x+\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

より

$$\frac{1}{2}\leqq\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1$$

辺々正であるから

$$1\leqq\frac{1}{\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}\leqq 2$$

である。よって，この関数は

$$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\quad\text{つまり}\quad x=\frac{\pi}{6}$$

のとき最小値${}^{(3)}\boxed{1}$をとる。

また

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}dx$$

において

$$2x+\frac{\pi}{6}=t$$

と置換すると

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\frac{1}{\sin t}\left(\frac{1}{2}dt\right)&=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\frac{\sin t}{\sin^2 t}dt\\
&=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\frac{\sin t}{1-\cos^2 t}dt\\
&=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}+\frac{\sin t}{1+\cos t}\right)dt\\
&=\frac{1}{4}\Big[\log(1-\cos t)-\log(1+\cos t)\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\\
&=\frac{1}{4}\left\{\log\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\log\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\log\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\log\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{4}\left\{2\log\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2\log\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left\{\log\frac{2+\sqrt{3}}{2}-\log\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right\}\\
&=\frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\\
&=\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})^2\\
&={}^{(4)}\boxed{\log(2+\sqrt{3})}
\end{aligned}$$

［Ⅲ］（記述問題）

媒介変数 t で表される次の曲線を C とする。

$$x(t)=e^{-t}(t+2),\quad y(t)=(e^{-t-1}-1)(e^{t-1}-1)\quad (-1\leqq t\leqq 1)$$

このとき，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(i)　$y(t)$ の最大値と最小値を求めよ。

(ii)　曲線 C と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

解答

(i)

$$\begin{aligned} y'(t)&=-e^{-t-1}\cdot(e^{t-1}-1)+(e^{-t-1}-1)\cdot e^{t-1}\\ &=-e^{-2}+e^{-t-1}+e^{-2}-e^{t-1}\\ &=e^{-t-1}-e^{t-1}\\ &=e^{-t-1}(1-e^{2t}) \end{aligned}$$

より，$y(t)$ の増減は次のようになる。

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	$(e^{-1}-1)^2$	$\searrow$	0

したがって，$y(t)$ は

最大値：$y(0)=(e^{-1}-1)(e^{-1}-1)=(e^{-1}-1)^2$

最小値：$y(-1)=y(1)=0$

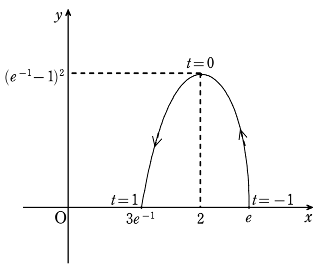
をとる。

(ii)　$x'(t)=-e^{-t}(t+2)+e^{-t}=-e^{-t}(t+1)$

より

$-1\leqq t\leqq 1$ において，$x'(t)\leqq 0$

であるから C の概形は図のようになる。



求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S&=\int_{x=3e^{-1}}^{x=e} y\,dx\\ &=\int_{t=1}^{t=-1} y\frac{dx}{dt}dt\\ &=\Big[y(t)x(t)\Big]_1^{-1}-\int_1^{-1} y'(t)x(t)dt\\ &=0-\int_1^{-1} e^{-t-1}(1-e^{2t})\cdot e^{-t}(t+2)dt\\ &=\int_{-1}^{1} e^{-2t-1}(1-e^{2t})(t+2)dt\\ &=\int_{-1}^{1} (e^{-2t-1}-e^{-1})(t+2)dt\\ &=\left[\left(-\frac{1}{2}e^{-2t-1}-e^{-1}t\right)(t+2)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{2}e^{-2t-1}-e^{-1}t\right)dt\\ &=\left(-\frac{1}{2}e^{-3}-e^{-1}\right)\cdot 3-\left(-\frac{1}{2}e+e^{-1}\right)\cdot 1-\left[\frac{1}{4}e^{-2t-1}-\frac{1}{2}e^{-1}t^2\right]_{-1}^{1}\\ &=-\frac{3}{2}e^{-3}-4e^{-1}+\frac{1}{2}e-\left(\frac{1}{4}e^{-3}-\frac{1}{2}e^{-1}\right)+\left(\frac{1}{4}e-\frac{1}{2}e^{-1}\right)\\ &=\frac{3}{4}e-4e^{-1}-\frac{7}{4}e^{-3} \end{aligned}$$