第 1 問

［1］

(1)
$$\sqrt{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$$
$$=\frac{\sqrt{{}^{\text{ア}}\boxed{3}}}{{}^{\text{イ}}\boxed{2}}\cos\theta+\frac{{}^{\text{ウ}}\boxed{3}}{{}^{\text{イ}}\boxed{2}}\sin\theta$$

これを ① に代入すると
$$\sin\theta>\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}\sin\theta$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta<0$$
$$\Leftrightarrow\ \sin\left(\theta+\frac{\pi}{{}^{\text{エ}}\boxed{3}}\right)<0$$
と変形できる。
$$\frac{\pi}{3}\leqq\theta<2\pi+\frac{\pi}{3}$$
に注意すると，求める範囲は
$$\pi<\theta+\frac{\pi}{3}<2\pi$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{{}^{\text{オ}}\boxed{2}}{{}^{\text{カ}}\boxed{3}}\pi<\theta<\frac{{}^{\text{キ}}\boxed{5}}{{}^{\text{ク}}\boxed{3}}\pi$$
である。

(2)
$$25x^2-35x+k=0\quad\cdots(*)$$
の解が
$$x=\sin\theta,\ \cos\theta$$
であるから，解と係数の関係により
$$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{7}{5}\\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{k}{25}\end{cases}$$
これを
$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
つまり
$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$$
に代入すると
$$\left(\frac{7}{5}\right)^2=1+2\cdot\frac{k}{25}\quad\Leftrightarrow\quad k={}^{\text{ケコ}}\boxed{12}$$
このとき，(*)は
$$25x^2-35x+12=0$$
$$\Leftrightarrow\ (5x-4)(5x-3)=0$$
より
$$x=\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}$$
であり，$\sin\theta\geqq\cos\theta$ を満たすことから
$$\sin\theta=\frac{{}^{\text{サ}}\boxed{4}}{{}^{\text{シ}}\boxed{5}},\ \cos\theta=\frac{{}^{\text{ス}}\boxed{3}}{{}^{\text{セ}}\boxed{5}}$$
である。このとき，θ は
$$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\quad\text{かつ}\quad\sin\theta\geqq\cos\theta$$
により
$$\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$$
を満たし，かつ
$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
に対し
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{3}{4}-\frac{16}{25}=\frac{75-64}{100}>0$$
であることから
$$\frac{\pi}{4}\leqq\theta<\frac{\pi}{3}\quad{}^{\text{ソ}}\boxed{③}$$
を満たす。

［2］

(1)　$a=t^{\frac{1}{3}}$，$b=t^{-\frac{1}{3}}$ とおく。このとき，
$$a>0,\ b>0,\ ab=1,\ a-b=-3$$
を満たすから
$$t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}=a^2+b^2$$
$$=(a-b)^2+2ab$$
$$=(-3)^2+2\cdot1$$
$$={}^{\text{タチ}}\boxed{11}$$
さらに
$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$
$$=11+2$$
$$=13$$
$a+b>0$ により
$$t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}=a+b=\sqrt{{}^{\text{ツテ}}\boxed{13}}$$
また
$$t-t^{-1}=a^3-b^3$$
$$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$=-3(11+1)$$
$$={}^{\text{トナニ}}\boxed{-36}$$

(2)
$$\begin{cases}\log_3(x\sqrt{y})\leqq5 & \cdots②\\ \log_{81}\dfrac{y}{x^3}\leqq1 & \cdots③\end{cases}$$
② は
$$\log_3x+\frac{1}{2}\log_3y\leqq5$$
と変形できるから，$X=\log_3x$，$Y=\log_3y$ とおくと
$$X+\frac{1}{2}Y\leqq5\quad\Leftrightarrow\quad{}^{\text{ヌ}}\boxed{2}X+Y\leqq{}^{\text{ネノ}}\boxed{10}\quad\cdots④$$
③ も同様にして
$$\frac{\log_3\dfrac{y}{x^3}}{\log_381}\leqq1\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\log_3y-3\log_3x}{4}\leqq1$$
$$\Leftrightarrow\quad Y-3X\leqq4$$
$$\Leftrightarrow\quad{}^{\text{ハ}}\boxed{3}X-Y\geqq{}^{\text{ヒフ}}\boxed{-4}\quad\cdots⑤$$
④より
$$X\leqq\frac{-Y+10}{2}$$
⑤ より
$$X\geqq\frac{Y-4}{3}$$
つまり
$$\frac{Y-4}{3}\leqq X\leqq\frac{-Y+10}{2}\quad\cdots⑥$$
が成り立ち，このような X が存在するのは
$$\frac{Y-4}{3}\leqq\frac{-Y+10}{2}$$
が成り立つときである。変形して
$$2Y-8\leqq-3Y+30\quad\Leftrightarrow\quad5Y\leqq38$$
これを満たす最大の整数 Y は
$$Y={}^{\text{ヘ}}\boxed{7}$$
である。このとき，⑥は
$$1\leqq X\leqq\frac{3}{2}$$
となる。$X=\log_3x$ であったから
$$1\leqq\log_3x\leqq\frac{3}{2}\quad\Leftrightarrow\quad3\leqq x\leqq3^{\frac{3}{2}}$$
$$\Leftrightarrow\quad3\leqq x\leqq3\sqrt{3}\ (=5.1\cdots)$$
により，x のとり得る最大整数は ${}^{\text{ホ}}\boxed{5}$ である。

別解　④，⑤を
$$\begin{cases}Y\leqq-2X+10\\ Y\leqq3X+4\end{cases}$$
として，$(X,\ Y)$ を座標とする平面で考えると視覚的にわかり易い。

第 2 問

(1)　$C: y=g(x)=x^2+2x+1$ とおく。

$$y'=2x+2$$

であるから，l の方程式は

$$y=({}^{\text{ア}}\boxed{2}\,t+{}^{\text{イ}}\boxed{2})x-t^2+{}^{\text{ウ}}\boxed{1}$$

$D: y=f(x)=x^2-(4a-2)x+4a^2+1$ に対し

$$y'=2x-(4a-2)$$

であるから，l の方程式は

$$y=({}^{\text{エ}}\boxed{2}\,s-{}^{\text{オ}}\boxed{4}\,a+{}^{\text{カ}}\boxed{2})x-s^2+{}^{\text{キ}}\boxed{4}\,a^2+{}^{\text{ク}}\boxed{1}$$

である。これらが同じ直線を表しているから

$$\begin{cases} 2t+2=2s-4a+2 \\ -t^2+1=-s^2+4a^2+1 \end{cases}$$

上式を

$$t=s-2a$$

として下式に代入すると

$$-(s-2a)^2=-s^2+4a^2+1 \iff s=2a$$

したがって

$$t={}^{\text{ケ}}\boxed{0},\quad s={}^{\text{コ}}\boxed{2}\,a$$

が成り立つ。したがって，l の方程式は

$$y={}^{\text{サ}}\boxed{2}\,x+{}^{\text{シ}}\boxed{1}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} f(x)=g(x) &\iff x^2+2x+1=x^2-(4a-2)x+4a^2+1 \\ &\iff 0=-4ax+4a^2 \\ &\iff 4a(x-a)=0 \end{aligned}$$

$a>0$ であるから

$$x=a$$

したがって，C，D の交点の x 座標は ${}^{\text{ス}}\boxed{a}$ である。

これより，求める面積は

$$\begin{aligned} S&=\int_0^a\{g(x)-(2x+1)\}dx \\ &=\int_0^a x^2dx \\ &=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{a^{{}^{\text{セ}}\boxed{3}}}{{}^{\text{ソ}}\boxed{3}} \end{aligned}$$

(3)　図を参考にして

（i）　$a>{}^{\text{タ}}\boxed{1}$ のとき

$$\begin{aligned} T&=\int_0^1\{g(x)-(2x+1)\}dx \\ &=\int_0^1 x^2dx=\frac{{}^{\text{チ}}\boxed{1}}{{}^{\text{ツ}}\boxed{3}} \end{aligned}$$

(ii)　$\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} T&=S+\int_a^1\{f(x)-(2x+1)\}dx \\ &=\frac{1}{3}a^3+\int_a^1(x-2a)^2dx \\ &=\frac{1}{3}a^3+\left[\frac{1}{3}(x-2a)^3\right]_a^1 \\ &=\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{3}(1-2a)^3-\frac{1}{3}(-a)^3 \\ &=\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{3}(1-6a+12a^2-8a^3)+\frac{1}{3}a^3 \\ &=-{}^{\text{テ}}\boxed{2}\,a^3+{}^{\text{ト}}\boxed{4}\,a^2-{}^{\text{ナ}}\boxed{2}\,a+\frac{{}^{\text{ニ}}\boxed{1}}{{}^{\text{ヌ}}\boxed{3}} \end{aligned}$$

(4)　$\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} U&=2T-3S \\ &=2\left(-2a^3+4a^2-2a+\frac{1}{3}\right)-3\cdot\frac{1}{3}a^3 \\ &=-5a^3+8a^2-4a+\frac{2}{3} \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \frac{dU}{da}&=-15a^2+16a-4 \\ &=-(15a^2-16a+4) \\ &=-(3a-2)(5a-2) \end{aligned}$$

よって，$\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ における U の増減は次のようになる。

a	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$\frac{dU}{da}$		$+$	0	$-$	
U		↗		↘	

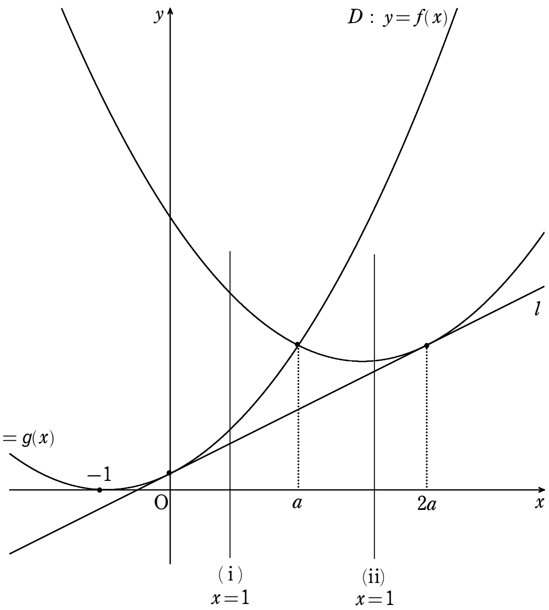
$a=\frac{2}{3}$ のとき

$$\begin{aligned} U&=-5\cdot\frac{8}{27}+8\cdot\frac{4}{9}-4\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3} \\ &=-\frac{40}{27}+\frac{32}{9}-\frac{8}{3}+\frac{2}{3} \\ &=\frac{-40+96-54}{27} \\ &=\frac{2}{27} \end{aligned}$$

であるから

$$U \text{ は } a=\frac{{}^{\text{ネ}}\boxed{2}}{{}^{\text{ノ}}\boxed{3}} \text{ のとき最大値 } \frac{{}^{\text{ハ}}\boxed{2}}{{}^{\text{ヒフ}}\boxed{27}}$$

をとる。



第 3 問

$$a_{n+1}=\frac{n+3}{n+1}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)\}\quad\cdots①$$

(1)
$$a_2=\frac{4}{2}\{3a_1+3^2-2\cdot 3\}=2(3\cdot 0+9-6)=^{ア}\boxed{6}$$

(2)
$$b_1=\frac{a_1}{3^1(1+1)(1+2)}=^{イ}\boxed{0}$$

① の両辺を $3^{n+1}(n+2)(n+3)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3^{n+1}(n+1)(n+2)}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)\}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}=\frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{3^{n+1}}$$

よって

$$b_{n+1}=b_n+\frac{^{ウ}\boxed{1}}{(n+^{エ}\boxed{1})(n+^{オ}\boxed{2})}-\left(\frac{1}{^{カ}\boxed{3}}\right)^{n+1}$$

したがって

$$b_{n+1}-b_n=\left(\frac{^{キ}\boxed{1}}{n+1}-\frac{^{キ}\boxed{1}}{n+2}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

となる。$n\geqq 2$ において

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}$$
$$=\frac{1}{^{ク}\boxed{2}}\left(\frac{n-^{ケ}\boxed{1}}{n+^{コ}\boxed{1}}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}$$
$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$
$$=\frac{^{サ}\boxed{1}}{^{シ}\boxed{6}}-\frac{^{ス}\boxed{1}}{^{セ}\boxed{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

が成り立つことを利用すると，$n\geqq 2$ において

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$
$$=0+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)-\left\{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\frac{n-^{ソ}\boxed{2}}{^{タ}\boxed{3}(n+^{チ}\boxed{1})}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

が得られる。これは $n=1$ のときも成り立つ。

(3)
$$a_n=3^n(n+1)(n+2)\cdot b_n$$
$$=3^n(n+1)(n+2)\left\{\frac{n-2}{3(n+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$
$$={}^{ツ}\boxed{3}^{\,n-^{テ}\boxed{1}}(n^2-^{ト}\boxed{4})+\frac{(n+^{ナ}\boxed{1})(n+^{ニ}\boxed{2})}{^{ヌ}\boxed{2}}$$

$3^{n-1}(n^2-4)$ はすべての n に対して整数である。
また，$(n+1)(n+2)$ は連続整数の積で偶数であるから
　　すべての n に対して a_n は整数である
と言える。

(4) すべての n に対して
$$3^{n-1}(n^2-4)$$
は 3 の倍数であるから，a_{3k}，a_{3k+1}，a_{3k+2} を 3 で割った余りは
$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
を 3 で割った余りに一致する。

$n=3k+1$，$3k+2$ のとき，a_n は 3 の倍数である。

$n=3k$ のとき，
$$\frac{(3k+1)(3k+2)}{2}=\frac{9k^2+9k+2}{2}$$
$$=9\cdot\frac{k(k+1)}{2}+1$$
により，a_n は 3 で割って 1 余る。

したがって，a_{3k}，a_{3k+1}，a_{3k+2} を 3 で割った余りはそれぞれ

$^{ネ}\boxed{1}$，$^{ノ}\boxed{0}$，$^{ハ}\boxed{0}$

である。また，
$$2020=3\times 673+1$$
であるから
$\{a_n\}$ の初項から第 2020 項までの和を S_{2020} とすると
$$S_{2020}=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+\cdots+(a_{2017}+a_{2018}+a_{2019})+a_{2020}$$
であり，これを 3 で割った余りは
$$(1+0+0)+(1+0+0)+\cdots+(1+0+0)+1$$
つまり
$$(1+0+0)\times 673+0=673$$
$$=3\times 224+1$$
と表せるから，S_{2020} を 3 で割った余りは $^{ヒ}\boxed{1}$ である。

第 4 問

(1) $$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=3\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

により

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=^{\text{ア}}\boxed{3}\sqrt{^{\text{イ}}\boxed{6}}$$

同様に

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|&=2\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2+(-2)^2}\\&=2\sqrt{(4+2\sqrt{3})+(4-2\sqrt{3})+4}\\&=2\sqrt{12}=^{\text{ウ}}\boxed{4}\sqrt{^{\text{エ}}\boxed{3}}\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=\begin{pmatrix}3\\3\\-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2+2\sqrt{3}\\2-2\sqrt{3}\\-4\end{pmatrix}\\&=(6+6\sqrt{3})+(6-6\sqrt{3})+24\\&=^{\text{オカ}}\boxed{36}\end{aligned}$$

である。

(2) $$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

に対し，①から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0\quad&\Leftrightarrow\quad\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0\\&\Leftrightarrow\quad s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0\\&\Leftrightarrow\quad 54s+36t=0\\&\Leftrightarrow\quad 3s+2t=0\ \cdots②\end{aligned}$$

さらに，①から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=24\quad&\Leftrightarrow\quad\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})=24\\&\Leftrightarrow\quad s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=24\\&\Leftrightarrow\quad 36s+48t=24\\&\Leftrightarrow\quad 3s+4t=2\ \cdots③\end{aligned}$$

②，③ により

$$s=\frac{^{\text{キク}}\boxed{-2}}{^{\text{ケ}}\boxed{3}},\quad t=^{\text{コ}}\boxed{1}$$

である。したがって

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2&=\left|-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\\&=\frac{4}{9}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\&=\frac{4}{9}\cdot54-\frac{4}{3}\cdot36+48\\&=24-48+48\\&=24\end{aligned}$$

により

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=^{\text{サ}}\boxed{2}\sqrt{^{\text{シ}}\boxed{6}}$$

(3) $$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CB}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\\&=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}3\\3\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}^{\text{ス}}\boxed{2}\\^{\text{セ}}\boxed{2}\\^{\text{ソタ}}\boxed{-4}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

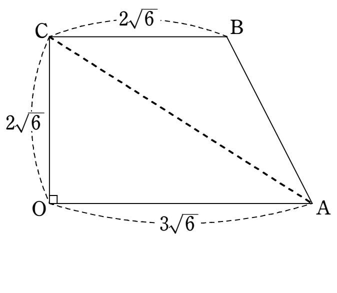
である。したがって，平面 α 上の四角形 OABC は

平行四辺形ではないが，台形である　$^{\text{チ}}\boxed{③}$

また，その面積は

$$\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{6}+3\sqrt{6})\cdot2\sqrt{6}$$
$$=^{\text{ツテ}}\boxed{30}$$

である。



(4) $$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\begin{pmatrix}a\\b\\1\end{pmatrix}$$

とおく。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0$$

であることから

$$a+b-2=0\ \cdots④$$

また

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\sqrt{6}$$

であることから

$$\begin{aligned}&(2+2\sqrt{3})a+(2-2\sqrt{3})b-4=2\sqrt{6}\\\Leftrightarrow\quad&(1+\sqrt{3})a+(1-\sqrt{3})b=\sqrt{6}+2\ \cdots⑤\end{aligned}$$

が得られる。④ を

$$b=-a+2$$

として ⑤ へ代入すると

$$\begin{aligned}&(1+\sqrt{3})a+(1-\sqrt{3})(-a+2)=\sqrt{6}+2\\\Leftrightarrow\quad&a+\sqrt{3}a-a+\sqrt{3}a+2-2\sqrt{3}=\sqrt{6}+2\\\Leftrightarrow\quad&2\sqrt{3}a=2\sqrt{3}+\sqrt{6}\\\Leftrightarrow\quad&a=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

であり

$$b=-a+2=-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

となる。したがって，点 D の座標は

$$\left(^{\text{ト}}\boxed{1}+\frac{\sqrt{^{\text{ナ}}\boxed{2}}}{^{\text{ニ}}\boxed{2}},\ ^{\text{ヌ}}\boxed{1}-\frac{\sqrt{^{\text{ネ}}\boxed{2}}}{^{\text{ノ}}\boxed{2}},\ 1\right)$$

である。また

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2&=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1^2\\&=\left(1+\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)+1\\&=4\end{aligned}$$

であるから

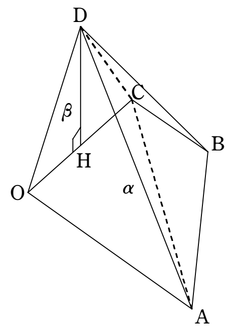
$$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=2$$

これを用いれば

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{COD}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|}\\&=\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot2}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$0^\circ\leqq\angle\mathrm{COD}\leqq180^\circ$ であるから

$$\angle\mathrm{COD}=^{\text{ハヒ}}\boxed{60}^\circ$$



さて，いま

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad\text{かつ}\quad\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

が成り立つことにより

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\text{平面 OCD}\,(\beta)$$

つまり

平面 α ⊥ 平面 β

が言える。これより，点 D から平面 α に下ろした垂線の足を H とおけば DH の長さが，四面体 DABC の高さに相当する。

$$\begin{aligned}\mathrm{DH}&=\mathrm{OD}\cdot\sin60^\circ\\&=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\sqrt{^{\text{フ}}\boxed{3}}\end{aligned}$$

また，底面 ABC の面積は左ページの図を参照すると

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{6}\cdot2\sqrt{6}\\&=12\end{aligned}$$

となるから，四面体 DABC の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot12\cdot\sqrt{3}=^{\text{ヘ}}\boxed{4}\sqrt{^{\text{ホ}}\boxed{3}}$$

である。