2020 年度　センター試験（数学ＩＡ）解答解説

第 1 問

［1］

(1)　直線 l の傾きが負であるから，

$$a^2-2a-8<0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+2)(a-4)<0$$

$$\Leftrightarrow \quad {}^{アイ}\boxed{-2}<a<{}^{ウ}\boxed{4}$$

(2)　直線 l の y 切片は a である。

（i）　$a>0$ のとき，l の傾きが負であれば $b>0$ となる。(1) から

$$-2<a<4 \quad かつ \quad a>0$$

により，

$${}^{エ}\boxed{0}<a<{}^{オ}\boxed{4}$$

(ii)　$a\leqq 0$ のとき，$a\neq 0$ かつ l の傾きが正であれば $b>0$ となる。(1) から

$$a<-2,\ a>4 \quad かつ \quad a<0$$

により，

$$a<{}^{カキ}\boxed{-2}$$

また，$a^2-2a-8\neq 0$ のとき

$$(a^2-2a-8)b+a=0$$

$$\Leftrightarrow \quad b=-\frac{a}{a^2-2a-8}$$

$a=\sqrt{3}$ を代入して

$$b=-\frac{\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}-8}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}=\frac{{}^{ク}\boxed{5}\sqrt{{}^{ケ}\boxed{3}}-{}^{コ}\boxed{6}}{{}^{サシ}\boxed{13}}$$

［2］

(1)　32 は (4 の倍数である) かつ (6 の倍数でない) ことから

$$32\in P\cap\overline{Q} \quad \left({}^{ス}\boxed{②}\right)$$

(2)　$P\cap Q$ に属する自然数は 12 の倍数である。よって，最小のものは

$${}^{セソ}\boxed{12}$$

また，12 は (24 の倍数でない) ことから

$$12\notin R \quad \left({}^{タ}\boxed{④}\right)$$

(3)　各命題は，ある自然数 n について

⓪　12 の倍数である　$\Longrightarrow$　24 の倍数でない（偽：$n=12$ は反例でない）
①　4 か 6 の倍数である　$\Longrightarrow$　24 の倍数でない（偽：$n=12$ は反例でない）
②　24 の倍数である　$\Longrightarrow$　12 の倍数である（真）
③　12 の倍数である　$\Longrightarrow$　24 の倍数である（偽：$n=12$ は反例）

ということである。このうち，$n=12$ が反例となっているのは

$${}^{チ}\boxed{③}$$

である。

［3］

(1)　G をグラフにもつ 2 次関数は

$$y=(x-c)\{x-(c+4)\}$$

$$=x^2-2\left(c+{}^{ツ}\boxed{2}\right)x+c\left(c+{}^{テ}\boxed{4}\right)$$

と表せる。2 点 (3,　0), (3,　-3) を両端とする線分は

$$x=3\ (-3\leqq y\leqq 0)$$

とかける。これを G の式と連立すると，

$$y=9-6(c+2)+c(c+4)$$

$$=c^2-2c-3$$

よって，

$$-3\leqq c^2-2c-3\leqq 0$$

を解けばよい。

$$\begin{cases} c^2-2c-3\geqq -3 \\ c^2-2c-3\leqq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c\leqq 0,\ c\geqq 2 \\ -1\leqq c\leqq 3 \end{cases}$$

したがって，

$$-{}^{ト}\boxed{1}\leqq c\leqq{}^{ナ}\boxed{0},\quad {}^{ニ}\boxed{2}\leqq c\leqq{}^{ヌ}\boxed{3}$$

(2)　G が (3,　-1) を通るとき，

$$-1=9-6(c+2)+c(c+4)$$

$$\Leftrightarrow \quad c^2-2c-2=0$$

$2\leqq c\leqq 3$ に注意して

$$c=1+\sqrt{3}$$

G は

$$y=\{x-(c+2)\}^2-4$$

と変形でき，そのグラフの頂点は

$$(c+2,\ -4)$$

であるから，$c=1+\sqrt{3}$ のとき頂点は

$$(3+\sqrt{3},\ -4)$$

つまり，G は $y=x^2$ のグラフを

x 軸方向に ${}^{ネ}\boxed{3}+\sqrt{{}^{ノ}\boxed{3}}$，$y$ 軸方向に ${}^{ハヒ}\boxed{-4}$

だけ平行移動したものである。また，G のグラフの y 切片は

$$c(c+4)$$

である。$c=1+\sqrt{3}$ を代入すれば

$$(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3}+4)$$

$$=(1+\sqrt{3})(5+\sqrt{3})$$

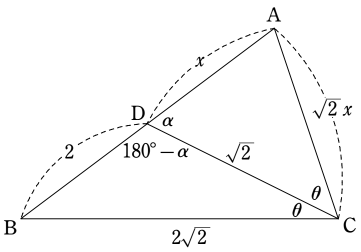
$$={}^{フ}\boxed{8}+{}^{ヘ}\boxed{6}\sqrt{{}^{ホ}\boxed{3}}$$

が求まる。

第 2 問

［1］

$\angle\mathrm{BCD}=\theta$，$\angle\mathrm{ADC}=\alpha$ とおく。



△BCD で余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2&=(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\theta\\&=8+2-8\cdot\frac{3}{4}\\&=4\end{aligned}$$

BD＞0 であるから

$$\mathrm{BD}={}^{\text{ア}}\boxed{2}$$

また，△BCD で再び余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\cos(180^\circ-\alpha)&=\frac{2^2+(\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot\sqrt{2}}\\&=\frac{-2}{4\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

これより，

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{{}^{\text{イウ}}\boxed{14}}}{{}^{\text{エ}}\boxed{4}}$$

が求まる。次に，△ACD で正弦定理を用いると

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

であることから

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{AC}}{\sin\alpha}=\frac{\mathrm{AD}}{\sin\theta}\quad&\Leftrightarrow\quad\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}=\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\\&\Leftrightarrow\quad\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}=\frac{\frac{\sqrt{14}}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}\\&\Leftrightarrow\quad\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}=\sqrt{{}^{\text{オ}}\boxed{2}}\end{aligned}$$

さらに，$\mathrm{AD}=x$，$\mathrm{AC}=\sqrt{2}\,x$ として △ACD で余弦定理を用いると

$$(\sqrt{2}\,x)^2=x^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot x\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\alpha$$

整理して

$$\begin{aligned}&x^2+x-2=0\\\Leftrightarrow\quad&(x+2)(x-1)=0\end{aligned}$$

$x>0$ であるから

$$x=\mathrm{AD}={}^{\text{カ}}\boxed{1}$$

また，

$$\mathrm{AC}=\sqrt{2}$$

より，△ACD は AC＝AD の二等辺三角形であるから

$$\angle\mathrm{CAD}=\alpha$$

したがって，求める外接円半径を R として △ABC で正弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{BC}}{\sin\alpha}=2R\quad&\Leftrightarrow\quad\frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{14}}{4}}=2R\\&\Leftrightarrow\quad R=\frac{{}^{\text{キ}}\boxed{4}\sqrt{{}^{\text{ク}}\boxed{7}}}{{}^{\text{ケ}}\boxed{7}}\end{aligned}$$

オの別解　角の二等分線の性質

$$\mathrm{AC}:\mathrm{BC}=\mathrm{AD}:\mathrm{BD}$$

を用いて

$$\mathrm{AC}:2\sqrt{2}=\mathrm{AD}:2\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}=\sqrt{{}^{\text{オ}}\boxed{2}}$$

［2］

以下，

Q_1：第 1 四分位数，M：中央値，Q_3：第 3 四分位数

とする。

(1)　98 個が 0，1 個が 100 の観測値をもつデータを考える。

このとき，

Q_1，Q_3 はともに 0 である

一方

平均値は 0 よりも大きな値をとる

ため ⓪ は誤り。

また，

M も 0

であり，

M「より」も小さい観測値は存在しない

ため ② は誤り。

次に，99 個がすべて 0 の観測値をもつデータを考える。

このとき，

四分位範囲は 0

一方

標準偏差も 0

である。（平均，分散ともに 0 であるため）

よって，① は誤り。

また，このとき

Q_1，Q_3 はともに 0

であり，④ のように削除できる観測値は存在しないため，④は誤り。

99 個の観測値の Q_1 は小さい順に数えたときの 25 番目の数である。

また，1 個の観測値を削除して 98 個になったとき

M は 49 番目と 50 番目の観測値の平均

であり，

Q_1 は前半残り 49 個の観測値の中央値

であるから，やはり 25 番目の数である。

よって，③ は正しい。

⑤ のように観測値を削除すると，(削除する値がない場合も含めて)

Q_1 がこのデータの最小値

Q_3 がこのデータの最大値

となる。よって，⑤ は正しい。

以上より，${}^{\text{コ}}\boxed{③}$ と ${}^{\text{サ}}\boxed{⑤}$ が正しい記述である。

(2)　グラフを読み取ればよい　${}^{\text{シ}}\boxed{⑥}$

(3)　20 個のデータがあることから，小さい順に並べたときの

M は 10 番目と 11 番目のデータの平均の値

Q_1 は 5 番目と 6 番目のデータの平均の値

Q_3 は 15 番目と 16 番目のデータの平均の値

である。これらをヒストグラムから読み取ると

M は 80.5 以上 81.0 未満の階級に属する

Q_1 は 80.0 以上 80.5 未満の階級に属する

これと，

最小値が 79.5 以上 80.0 未満の階級に属する

最大値が 81.5 以上 82.0 未満の階級に属する

以上を満たす箱ひげ図は${}^{\text{ス}}\boxed{④}$ である。

(4)　女性の平均寿命の値を y，男性の平均寿命の値を x とする。

このとき，男女の平均寿命の差は $y-x$ に対応する。($y>x$ のため)

図 3 の直線は左から順に

$y=x+7.5$，$x+7$，$x+6.5$，$x+6$，$x+5.5$

と表せる。例えば，

$x+5.5\leqq y\leqq x+6$

の領域に属する ○ の個数は

$5.5\leqq y-x\leqq 6$

に属する ○ の個数という意味である。

これを数えると

9 個

であるから，対応するヒストグラムは${}^{\text{セ}}\boxed{③}$ である。

第 3 問

［1］

⓪　コインの表，裏が同様に確からしく出るものとして考える。

このコインを 5 回投げたとき，少なくとも 1 回は表が出る確率 p は

$$p=1-\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{31}{32}=0.968\cdots>0.95$$

より，この記述は正しい。

①　赤球，白球の個数の組み合わせによって題意の確率は変わる。

この記述は誤りである。

②　「い」と「ろ」のカードを取り出す場合の数は 2 通り

「い」と「は」のカードを取り出す場合の数は 2 通り

「ろ」と「は」のカードを取り出す場合の数は $2^2=4$ 通り

よって，題意の確率は

$$\frac{2+2+4}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

となるから，この記述は正しい。

③　事象 A : 2 体が「オモテ」と発言する

事象 B : コインを投げて表が出る

とする。求める確率は，条件付き確率

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$$

である。

$$P(\mathrm{A})=\frac{1}{2}\times0.9^2+\frac{1}{2}\times0.1^2$$

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{2}\times0.9^2$$

により

$$\begin{aligned}P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})&=\frac{\frac{1}{2}\times0.9^2}{\frac{1}{2}\times0.9^2+\frac{1}{2}\times0.1^2}\\&=\frac{0.81}{0.81+0.01}\\&=\frac{81}{82}\\&=0.987\cdots>0.9\end{aligned}$$

よって，この記述は誤りである。

以上から，正しい記述は ア $\boxed{⓪}$ と イ $\boxed{②}$ である。

［2］

以下，表が出る場合を○，裏が出る場合を×で表す。

(1)　2 回投げ終わって持ち点が -2 であるのは

××

が起こるときであるから，確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\text{ウ}\boxed{1}}{\text{エ}\boxed{4}}$$

持ち点が 1 であるのは

○×　or　×○

が起こるときであるから，確率は

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\text{オ}\boxed{1}}{\text{カ}\boxed{2}}$$

である。

(2)　持ち点が 0 点になるとき，表が a 回，裏が b 回出るとする。

このとき

$$\begin{cases}a+b=k\\2a-b=0\end{cases}$$

ただし k は，$k=1$, 2, 3, 4, 5 のいずれかである。和をとると

$3a=k$

a が整数になるのは，$k=3$ のときのみである。

したがって，持ち点が 0 点になるのはコインを

キ $\boxed{3}$ 回

投げ終わったときである。このとき，$a=1$, $b=2$ より

○××　or　×○×　or　××○

が起こるときであるから，確率は

$$3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\text{ク}\boxed{3}}{\text{ケ}\boxed{8}}$$

である。

(3)　4 点で終わるということは，コインは 5 回投げられたはずである。

このとき，(2) と同様に

$$\begin{cases}a+b=5\\2a-b=4\end{cases}$$

を解いて，$a=3$, $b=2$ が得られる。

これを書き出すと以下の 10 通りである。

1)　○○○××	2)　○○×○×
3)　○○××○	4)　○×○○×
5)　○×○×○	6)　○××○○
7)　×○○○×	8)　×○○×○
9)　×○×○○	10)　××○○○

このうち，途中で 0 点になってゲームが終わってしまうのは，

(2) によりはじめの 3 回で

○××　×○×　××○

が起こってしまう場合で，それぞれ

6)　9)　10)

である。したがって，求める確率は

$$\frac{\text{コ}\boxed{7}}{\text{サシ}\boxed{32}}$$

(4)　(3) の 7 通りのうち，2 回投げ終わって持ち点が 1 であるのは

4)　と　5)　と　7)　と　8)

である。したがって，求める条件付き確率は

$$\frac{\text{ス}\boxed{4}}{\text{セ}\boxed{7}}$$

第 4 問

(1)
$$100x = 236.363636\cdots$$
$$x = \quad 2.363636\cdots$$

差をとって

$$99x = 234$$
$$x = \frac{234}{99} = \frac{{}^{アイ}\boxed{26}}{{}^{ウエ}\boxed{11}}$$

(2)
$$49y = 2ab.ababab\cdots_{(7)}$$
$$y = \quad 2.ababab\cdots_{(7)}$$

差をとって

$$48y = 2ab_{(7)} - 2_{(7)}$$

10 進法表記にすると

$$48y = (2\times7^2 + a\times7^1 + b\times7^0) - 2\times7^0$$
$$\Leftrightarrow \quad 48y = (98 + 7a + b) - 2$$
$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{{}^{オカ}\boxed{96} + 7\times a + b}{{}^{キク}\boxed{48}}$$

と表せる。

(i)　$2 \leqq y < 3$ であるから，

$$2 \leqq \frac{96+7a+b}{48} < 3$$
$$\Leftrightarrow \quad 96 \leqq 96 + 7a + b < 144 \quad \cdots(*)$$

分母が 4 であることから，$(*)$を満たす 12 の倍数を考えて

$$\frac{96}{48},\ \frac{108}{48},\ \frac{120}{48},\ \frac{132}{48}$$

つまり

$$2,\ \frac{9}{4},\ \frac{5}{2},\ \frac{11}{4}$$

である。題意を満たすものは

$$y = \frac{{}^{ケ}\boxed{9}}{4} \quad と \quad y = \frac{{}^{コサ}\boxed{11}}{4}$$

である。$y = \dfrac{11}{4}$ のとき

$$96 + 7a + b = 132$$

つまり

$$7\times a + b = {}^{シス}\boxed{36}$$

であるから，$0 \leqq a,\ b \leqq 6$ であることに注意して

$$a = {}^{セ}\boxed{5},\ b = {}^{ソ}\boxed{1}$$

である。

(ii)
$$y - 2 = \frac{96+7a+b}{48} - 2$$
$$= \frac{7a+b}{48}$$

$(*)$より

$$0 \leqq 7a + b < 48$$

である。このうち，分子が 1 になる可能性があるものは，分子が 48 の正の約数になっているものを考えればよく，書き出すと

$$\frac{1}{48},\ \frac{2}{48},\ \frac{3}{48},\ \frac{4}{48},\ \frac{6}{48},\ \frac{8}{48},\ \frac{12}{48},\ \frac{24}{48}$$

である。

$7a+b=1$　となるのは　$a=0,\ b=1$
$7a+b=2$　となるのは　$a=0,\ b=2$
$7a+b=3$　となるのは　$a=0,\ b=3$
$7a+b=4$　となるのは　$a=0,\ b=4$
$7a+b=6$　となるのは　$a=0,\ b=6$
$7a+b=8$　となるのは　$a=1,\ b=1$
$7a+b=12$　となるのは　$a=1,\ b=5$
$7a+b=24$　となるのは　$a=3,\ b=3$

a と b が互いに異なるという条件により

$$\frac{8}{48} \quad と \quad \frac{24}{48}$$

は不適である。以上より，求める y の個数は

${}^{タ}\boxed{6}$ 個

である。

第 5 問

チェバの定理より

$$\frac{CD}{BD}\cdot\frac{GB}{AG}\cdot\frac{AE}{CE} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{7}\cdot\frac{GB}{AG}\cdot\frac{7}{1} = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{GB}{AG} = {}^{ア}\boxed{1}$$

△ACD と直線 BE に対してメネラウスの定理を用いると

$$\frac{AE}{CE}\cdot\frac{CB}{BD}\cdot\frac{FD}{AF} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7}{1}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{FD}{AF} = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{FD}{AF} = \frac{{}^{イ}\boxed{1}}{{}^{ウ}\boxed{8}}$$

△CAG と直線 BE に対してメネラウスの定理を用いると

$$\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AB}{BG}\cdot\frac{GF}{FC} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{7}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{GF}{FC} = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{FC}{GF} = \frac{{}^{エ}\boxed{2}}{{}^{オ}\boxed{7}}$$

これらより，△ABC の面積を S とおくと

△CDG の面積は $S\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{16}S$

△BFG の面積は $S\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{7}{9} = \dfrac{7}{18}S$

したがって

$$\frac{△CDG の面積}{△BFG の面積} = \frac{\frac{1}{16}S}{\frac{7}{18}S} = \frac{{}^{カ}\boxed{9}}{{}^{キク}\boxed{56}}$$

次に，FD＝1，AF＝8，AG＝BG＝x とおく。4 点 B，D，F，G が同一円周上にあるから，方べきの定理により

$$AG\cdot AB = AF\cdot AD \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot 2x = 8\cdot 9$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 36$$

$x > 0$ であるから，

$$x = 6$$

したがって

$$AB = 2x = 2\cdot6 = {}^{ケコ}\boxed{12}$$

さらに

$$AE = 3\sqrt{7}$$

のとき

$$AC = \frac{8}{7}AE = \frac{24}{7}\sqrt{7}$$

であるから

$$AE\cdot AC = 3\sqrt{7}\cdot\frac{24\sqrt{7}}{7} = {}^{サシ}\boxed{72}$$

これにより

$$72 = AG\cdot AB = AE\cdot AC$$

が成り立つ。よって，方べきの定理の逆により

4 点 B，C，E，G は同一円周上に存在する

ことが言えるため

$$\angle AEG = \angle ABC \quad {}^{ス}\boxed{②}$$

である。